Équations différentielles linéaires scalaires

Résolution d'équation scalaire d'ordre 1

Exercice 1 [00382] [Correction]
Résoudre sur $]1\,;+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x.$$

Exercice 2 [03782] [Correction]
Résoudre sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$

$$y'(x) - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0.$$

Exercice 3 [00376] [Correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' - y = \sin(2x)\mathrm{e}^x$

(b) $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$

(c) $y' + y\tan x = \sin 2x$ sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$

Exercice 4 [00377] [Correction]
Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

(a) $y' - (x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$

(b) $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

Exercice 5 [03505] [Correction]
On considère l'équation

$$(E) : (1-x)y' - y = g$$

où $g :]-1\,;1[\to \mathbb{R}$ est donnée.

(a) Résoudre l'équation homogène associée.

(b) On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geq 1$.
Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geq 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étude théorique d'équation d'ordre 1

Exercice 6 [00380] [Correction]
Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.
Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 [00381] [Correction]

(a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ converge vers 0 en $+\infty$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f + f' \xrightarrow[+\infty]{} \ell$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Exercice 8 [03109] [Correction]
Soient α un complexe de partie réelle strictement positive et une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + \alpha f$ tend vers 0 en $+\infty$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 9 [04100] [Correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.
On étudie l'équation différentielle

$$(E) : y' + \alpha y = \varphi(t).$$

(a) Montrer que si y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi.

(b) En déduire qu'une solution y de (E) est T-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.

(c) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T-périodique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α que l'on précisera.

Résolution avec raccord d'équation d'ordre 1

Exercice 10 [00419] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$(E)\colon x^2y' - y = 0.$$

Exercice 11 [00421] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante
$$(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1.$$

Exercice 12 [03468] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante
$$\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = 1.$$

Exercice 13 [00429] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' + y = \max(x, 0).$$

Exercice 14 [02889] [Correction]
Résoudre
$$x \ln x y' - (3 \ln x + 1)y = 0.$$

Exercice 15 [00420] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $xy' - y = x$

(b) $xy' + y - 1 = 0$

(c) $xy' - 2y = x^4$

(d) $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$

Exercice 16 [00422] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

(b) $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$

Exercice 17 [00423] [Correction]
Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

(a) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 0$

(b) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 1$.

Exercice 18 [00424] [Correction]
Résoudre sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2.$$

Exercice 19 [00425] [Correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$xy' - \alpha y = 0$$
en discutant selon les valeurs de α.

Exercice 20 [00105] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et g une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle
$$xy' - y = f(x).$$

(a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$ pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0. Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.

(b) f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ et la condition précédente est vérifiée. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 21 [00506] [Correction]
Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1.$$

(a) Résoudre (E) sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
(b) Soit g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[\setminus\{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Montrer que g se prolonge sur $]-1\,;+\infty[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
(c) Démontrer que (E) admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 22 [01369] [Correction]
Soit α un paramètre réel. On désire résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$E\colon xy' = \alpha y.$$

On considère $x \mapsto y(x)$ une solution de E sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
(a) Donner l'expression de $y(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
On notera C^+ et C^- les constantes réelles permettant d'exprimer $y(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
(b) À quelles conditions sur les constantes C^+ et C^-, est-il possible de prolonger y par continuité en 0 ?
On distinguera trois cas, selon que $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.
(c) Pour $\alpha > 0$, à quelles conditions sur les constantes C^+ et C^- la fonction prolongée y est-elle dérivable en 0 ?
On distinguera trois cas, selon que $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ ou $\alpha > 1$.
(d) Résumer l'étude précédente en donnant la solution générale de E sur $\mathbb{R}$ en fonction de α.

Résolution d'équation scalaire d'ordre 2

Exercice 23 [03240] [Correction]
Soit $\alpha > 0$. Résoudre sur $I =]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle

$$E_\alpha\colon x^2y''(x) + xy'(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$

On pourra étudier les fonctions propres de l'application

$$\varphi\colon y(x) \mapsto xy'(x).$$

Méthode de variation des constantes

Exercice 24 [00405] [Correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}.$$

Exercice 25 [00406] [Correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan t.$$

Exercice 26 [00407] [Correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan^2 t.$$

Exercice 27 [02893] [Correction]
Résoudre sur $]0\,;\pi[$

$$y'' + y = \cot x.$$

Exercice 28 [02455] [Correction]
(a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt).$$

(b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt).$$

Exercice 29 [00409] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f + f'' \geq 0.$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0.$$

Exercice 30 [02896] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique et solution de
$$y'' + y = f\ ?.$$

Exercice 31 [02895] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 32 [02894] [Correction]

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ par variation des constantes l'équation différentielle
$$y'' + y = 1/x.$$

(b) En déduire une expression de
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
valable pour $x > 0$.

(c) Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Recherche de solution développable en série entières

Exercice 33 [01016] [Correction]

(a) Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle
$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

(b) Exprimer parmi celles-ci, celles dont la somme est une fonction paire.

Exercice 34 [00401] [Correction]
Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation
$$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$$
en recherchant les fonctions développables en série entière.

Exercice 35 [00404] [Correction]

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0$$
en recherchant les séries entières solutions.

(b) Résoudre ensuite
$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Exercice 36 [02528] [Correction]

(a) Montrer qu'il existe une solution h de l'équation
$$xy'' + y' + y = 0$$
développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.

(b) Montrer que h s'annule sur $]0\,;2[$.

(c) Montrer que h ne s'annule qu'une seule fois sur $]0\,;2[$.

Wronskien

Exercice 37 [00394] [Correction]
Soient $a, b\colon I \to \mathbb{C}$ continues et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de l'équation
$$E\colon y'' + a(t)y'(t) + b(t)y = 0.$$
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par le wronskien
$$w\colon t \mapsto \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Exercice 38 [04001] [Correction]
On étudie sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle
$$(E)\colon ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = 0.$$

(a) Vérifier que $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$ détermine une solution de (E).

(b) Déterminer une expression du wronskien $w(t)$ de deux solutions de l'équation (E).

(c) En déduire une solution de (E) indépendante de φ et exprimer la solution générale de (E).

Étude théorique d'équation d'ordre 2

Exercice 39 [01555] [Correction]
Soit $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle.
On se propose de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ s'annulent.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

(a) Justifier que f est de signe constant.

Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut supposer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0.$$

(b) Étudier le signe de f''.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?

(d) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a.

(e) En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

Exercice 40 [00402] [Correction]
Soit $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle.
Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$ s'annule.

Exercice 41 [03779] [Correction]
Soient q une fonction continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles et f une solution non nulle sur $[a\,;b]$ de l'équation différentielle

$$(E)\colon y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

Exercice 42 [00436] [Correction]
Soient q une fonction continue, intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et (E) l'équation différentielle

$$y'' + q(x)y = 0.$$

(a) Si f est une solution bornée de (E) sur $[0\,;+\infty[$, montrer que sa dérivée f' admet une limite finie en $+\infty$.
Quelle est la valeur de sa limite ?

(b) Soient f et g deux solutions bornées. Étudier le wronskien de f et de g

$$w = f'g - fg'.$$

En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Exercice 43 [03671] [Correction]
Soient $q_1, q_2\colon I \to \mathbb{R}$ continues vérifiant $q_1 \leq q_2$.
On note φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement des équations

$$y'' + q_1(x)y = 0 \text{ et } y'' + q_2(x)y = 0.$$

On suppose la solution φ_1 non identiquement nulle.

(a) Montrer que les zéros de φ_1 sont isolés *i.e.* que si $x_0 \in I$ annule φ_1 alors

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha], \varphi(x) = 0 \implies x = x_0.$$

(b) Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de φ_1. Montrer que φ_2 s'annule sur $[a\,;b]$.
On pourra étudier $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$.

(c) *Application:* Montrer que si φ est une solution non nulle de l'équation $y'' + e^x y = 0$ alors

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists x \in [a\,;a + \pi], \varphi(x) = 0.$$

Exercice 44 [03387] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon y'' + \cos^2(t)y = 0.$$

(a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

(b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0.$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\{t < 0 \mid u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t > 0 \mid u(t) = 0\}.$$

(d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u.
En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans$]\gamma\,;\delta[$.

(e) Soit w une solution non nulle de (E). Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

[Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 45 [03920] [Correction]
Soient $q \in \mathcal{C}^0\Big([a\,;+\infty[, \mathbb{R}_+\Big)$ et (E) l'équation différentielle $y'' = q(x)y$.

(a) Soit f une solution de (E) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$.
Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(b) Soient u et v les solutions de (E) telles que

$$\begin{cases} u(a) = 1 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = 1. \end{cases}$$

Calculer $u'v - uv'$. Montrer que, sur $]a\,;+\infty[$, u/v et u'/v' sont monotones de monotonies contraires. Montrer que u/v et u'/v' tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.

(c) Montrer qu'il existe une unique solution g de (E), strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g décroisse sur $[a\,;+\infty[$.

(d) Déterminer g lorsque $q(x) = 1/x^4$ sur $[1\,;+\infty[$.
On pourra poser $y(x) = xz(1/x)$.

Exercice 46 [04178] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E_1)\colon x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

(a) Soit u_1 et u_2 deux solutions de (E_1) telles que $u_1u_2 = 1$. On pose $z_i = u_i'/u_i$.
Montrer que les z_i sont deux solutions opposées d'une équation différentielle non linéaire (E_2).

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que (E_1) admette deux solutions u_1 et u_2 telles que $u_1u_2 = 1$.

(c) Résoudre sur $I =]-\pi/4\,;\pi/4[$ l'équation

$$\big(1 + \cos(4t)\big)x'' - 2\sin(4t)x' - 8x = 0.$$

Problèmes se ramenant à la résoluton d'équations différentielles

Exercice 47 [02535] [Correction]
Quelles sont les fonctions continues f telles que

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x - t)f(t)\,\mathrm{d}t?$$

Exercice 48 [02419] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x.$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Trouver toutes les fonctions f solution de l'équation étudiée.

Exercice 49 [00378] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + 1.$$

Exercice 50 [02890] [Correction]
Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout x réel

$$f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x - t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 51 [01554] [Correction]
Trouver toutes les applications $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x.$$

Exercice 52 [02892] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(1/x).$$

Exercice 53 [03506] [Correction]
Déterminer la dimension de l'espace

$$E = \left\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = y(0)\cos(x)\right\}.$$

Exercice 54 [03108] [Correction]
Soient f une fonction réelle continue sur $[0\,;1]$ et λ un réel.
Trouver u fonction réelle continue sur $[0\,;1]$ telle que

$$u(x) = \lambda \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t + f(x).$$

Exercice 55 [01553] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \text{ et } f(0) = 1.$$

Résolution avec raccord d'équation d'ordre 2

Exercice 56 [00427] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en commençant par rechercher les solutions polynomiales.

Exercice 57 [00428] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0.$$

Exercice 58 [00426] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' - x^3 y = 0.$$

(a) Montrer que si y est solution sur I alors $x \mapsto y(-x)$ est solution sur I' symétrique de I par rapport à 0.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation via le changement de variable $t = x^2$.

(c) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 59 [03501] [Correction]
On étudie l'équation différentielle

$$(E)\colon 4xy'' + 2y' - y = 0.$$

(a) Déterminer les fonctions développables en série entière solutions

(b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ en posant respectivement $x = t^2$ et $x = -t^2$.

(c) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 60 [01560] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$E\colon xy'' - (1+x)y' + y = 1$$

en posant $z = y' - y$.

Résolution par changement de fonction inconnue

Exercice 61 [01556] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 0.$$

Exercice 62 [01559] [Correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$(1+\mathrm{e}^x)^2 y'' - 2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)y' - (3\mathrm{e}^x+1)y = 0$$

en introduisant

$$z(x) = \frac{y(x)}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 63 [01558] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = \mathrm{e}^{x^2} y(x)$.

Exercice 64 [00413] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$$

en posant $z = x^2y$.

Exercice 65 [03508] [Correction]
Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$$

en posant $y(x) = x^\alpha z(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.

Exercice 66 [00412] [Correction]
Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation

$$x^2y'' - 2y + \frac{3}{x} = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = xy'(x) + y(x)$.

Méthode de Lagrange

Exercice 67 [00395] [Correction]
On étudie l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = t.$$

(a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène associée.

(b) Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

(c) Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

Exercice 68 [00396] [Correction]
On étudie l'équation

$$(1 + t^2)^2 y''(t) - 2t(1 + t^2)y'(t) + 2(t^2 - 1)y(t) = (1 + t^2).$$

(a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène.

(b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

Exercice 69 [00397] [Correction]
On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$t^3y'' + ty' - y = 0.$$

(a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de cette équation.

(b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

Exercice 70 [00398] [Correction]
On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$t^2y'' + ty' - y = 1.$$

(a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène.

(b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

Exercice 71 [01319] [Correction]
On étudie l'équation différentielle suivante sur $]0\,;+\infty[$

$$(E)\colon xy'' + 3y' - 4x^3y = 0.$$

(a) Chercher une solution $\varphi(x)$ développable en série entière au voisinage de 0 et non nulle.

(b) Terminer de résoudre l'équation par le changement de fonction inconnue $y(x) = \varphi(x)z(x)$

Exercice 72 [03504] [Correction]
On étudie sur $]0\,;1[$ l'équation différentielle suivante

$$x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0.$$

(a) Rechercher une solution développable en série entière non nulle $\varphi(x)$.
(b) Achever de résoudre cette équation par le changement de fonction $y(x)=\varphi(x)z(x)$.

Résolution par changement de variable

Exercice 73 [01566] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations suivantes via le changement de variable $t=\ln x$.

(a) $x^2y''+xy'-y=x^2$
(b) $x^2y''-2y=x$

Exercice 74 [00416] [Correction]
Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation

$$(1-x^2)y''-xy'+4y=\arccos x$$

en procédant au changement de variable $x=\cos(t)$.

Exercice 75 [00415] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+x^2)^2y''+2(x-1)(1+x^2)y'+y=0$$

en procédant au changement de variable $t=\arctan x$.

Exercice 76 [00417] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y''+\frac{2t}{t^2+1}y'+\frac{1}{(t^2+1)^2}y=\frac{t}{(t^2+1)^2}$$

en posant $x=\arctan t$.

Exercice 77 [02573] [Correction]
En indiquant les hypothèses nécessaires, effectuer le changement de variable $u=\varphi(t)$ dans l'équation différentielle

$$(1+t^2)x''+tx'+a^2x=0$$

tel qu'elle devienne une équation à coefficients constants et la résoudre.

Exercice 78 [02540] [Correction]
On veut résoudre

$$(E)\colon (x+1)y''-(3x+4)y'+3y=(3x+2)\mathrm{e}^{3x}.$$

Si Δ est l'opérateur de dérivation et $Q(X)=X-3$, on a $Q(\Delta)(y)=y'-3y$.
Montrer l'existence d'un polynôme P de la forme $a(x)X+b(x)$ tel que (E) devienne

$$\big(P(\Delta)\circ Q(\Delta)\big)(y)=(3x+2)\mathrm{e}^{3x}.$$

Résoudre l'équation à l'aide du changement de variable $z=Q(\Delta)(y)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Solution homogène : $y_0(x) = C\sqrt{x^2-1}$.
Par variation de la constante, solution particulière $y_1(x) = 2(x^2-1)$.
Solution générale : $y(x) = C\sqrt{x^2-1} + 2(x^2-1)$.

Exercice 2 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire de solution générale homogène

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x}.$$

L'application de la méthode de la variation de la constante amène à déterminer

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}x - \int \cos x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

Au final, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + \lambda}{\cos x}.$$

Exercice 3 : [énoncé]

(a) $y(x) = (C + \sin^2 x)\mathrm{e}^x$

(b) $y(x) = (x^2 + C)\mathrm{e}^{-x^2}$

(c) $y(x) = C\cos x - 2\cos^2 x$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x) = -1$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

On aura $y(0) = 1$ si, et seulement si, $C = 2/\sqrt{\mathrm{e}}$.

(b) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x) = x - 1$ après recherche de solution de la forme $ax + b$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x} + x - 1 \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

On aura $y(0) = -1$ si, et seulement si, $C = 0$.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) C'est une équation différentielle linéaire. La solution générale homogène est

$$y(x) = \frac{\lambda}{1-x}.$$

(b) On peut trouver une solution particulière par la méthode de la variation des constantes de la forme

$$y(x) = \frac{\lambda(x)}{1-x}$$

avec λ fonction dérivable vérifiant

$$(1-x)\frac{\lambda'(x)}{1-x} = g(x) \quad \textit{i.e.} \quad \lambda'(x) = g(x).$$

Par intégration de série entière de rayon de convergence $R \geq 1$

$$\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n \text{ convient.}$$

On obtient alors la solution particulière (pour $x \in \left]-1\,;1\right[$)

$$y(x) = \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k-1}}{k} x^n.$$

Cette solution est développable en série entière avec un rayon de convergence R' au moins égal à 1 (car la série converge assurément sur $\left]-1\,;1\right[$ par les calculs qui précèdent).

Exercice 6 : [énoncé]
La solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} \text{ avec } A(t) = \int_0^t a(u)\,du.$$

Or pour tout $t \geq 0$,

$$|A(t)| \leq \int_0^t |a(u)|\,du \leq \int_0^{+\infty} |a(u)|\,du$$

et donc la fonction y est bornée.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = h$ est

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x h(t)e^t\,dt\right)e^{-x}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq A, |h(t)| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^A h(t)e^t\,dt\right)e^{-x} + \int_A^x h(t)e^{t-x}\,dt$$

avec

$$\left|\int_A^x h(t)e^{t-x}\,dt\right| \leq \varepsilon \text{ et } \left(\lambda + \int_0^A h(t)e^t\,dt\right)e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(b) Posons $h = f' + f - \ell$. $f - \ell$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = h$ donc $f - \ell \xrightarrow[+\infty]{} 0$ puis $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Exercice 8 : [énoncé]
Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction f est solution de l'équation différentielle.

$$y' + \alpha y = g.$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$y(x) = \lambda e^{-\alpha x} + \int_0^x g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt.$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x) = \lambda e^{-\alpha x} + \int_0^x g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt.$$

Il est immédiat que $\lambda e^{-\alpha x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ car $\operatorname{Re}\alpha > 0$.
Étudions maintenant la limite du terme intégral.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall t \geq A, |g(t)| \leq \varepsilon.$$

On a alors pour tout $x \geq A$

$$\int_0^x g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt = \int_0^A g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt + \int_A^x g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt$$

avec

$$\left|\int_A^x g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt\right| \leq \int_A^x \varepsilon e^{\operatorname{Re}(\alpha)(t-x)}\,dt \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)}\left[e^{\operatorname{Re}(\alpha)(t-x)}\right]_A^x \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)}$$

et

$$\left|\int_0^A g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt\right| = \left|\int_0^A g(t)e^{\alpha t}\,dt\right|e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} = C^{te}e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Pour x assez grand on a alors

$$\left|\int_0^x g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(\alpha)} + \varepsilon.$$

Ainsi $\int_0^x g(t)e^{\alpha(t-x)}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puis $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Posons $z(t) = y(t+T)$. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) + \alpha z(t) = y'(t+T) + \alpha y(t+T) = \varphi(t+T) = \varphi(t).$$

La fonction z est donc solution de (E).

(b) Si y est T-périodique, on a évidemment $y(0) = y(T)$.
Inversement, si $y(0) = y(T)$ alors y et z sont solutions d'un même problème de Cauchy posé en 0. Par unicité de ces solutions, on peut conclure $y = z$.

(c) On peut exprimer la solution générale de l'équation (E)

$$y(t) = \left(\lambda + \int_0^t \varphi(u)\mathrm{e}^{\alpha u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

L'équation $y(0) = y(T)$ équivaut alors l'équation

$$\lambda = \left(\lambda + \int_0^T \varphi(u)\mathrm{e}^{\alpha u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\alpha T}.$$

Si $\mathrm{e}^{\alpha T} \neq 1$, cette équation précédente possède une unique solution en l'inconnue λ ce qui détermine y.
La condition $\mathrm{e}^{\alpha T} = 1$ est uniquement vérifiée pour les valeurs

$$\alpha = \frac{2\mathrm{i}k\pi}{T} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 10 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$,

$$E \iff y' = \frac{1}{x^2}y.$$

Solution générale : $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/x}$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+\mathrm{e}^{-1/x} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^-\mathrm{e}^{-1/x}.$$

Continuité en 0

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^- \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Nécessairement $y(0) = 0$ et $C^- = 0$.
Dérivabilité en 0

$$y'(x) = \frac{C^+}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0 \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} 0 \text{ donc } y'(0) = 0.$$

Equation différentielle en 0 : $0^2y'(0) - y(0) = 0$: ok.
Finalement

$$\exists C \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Inversement une telle fonction est solution.

Exercice 11 : [énoncé]
Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

$$y(x) = \frac{C + x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Soit y une fonction solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = \frac{C^+ + x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \frac{C^- + x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Pour que la fonction y puisse être prolongée par continuité en 0, il faut $C^+ = C^- = 0$ auquel cas

$$y(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ pour } x \neq 0$$

et la fonction se prolonge par $y(0) = 1$.
On vérifie que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car inverse d'une fonction développable en série entière.
De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\mathrm{e}^x - 1\right)y(x) = x$$

donne par dérivation, la vérification de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
Finalement, il existe une seule solution sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ prolongée par continuité avec } y(0) = 1.$$

Exercice 12 : [énoncé]
Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

$$y(x) = C\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x.$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13 : [énoncé]
Nommons E l'équation étudiée.
Sur $\mathbb{R}_+$,

$$E \iff y' + y = x$$

de solution générale $y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + x - 1$.
Sur $\mathbb{R}_-$,

$$E \iff y' + y = 0$$

de solution générale $y(x) = C\mathrm{e}^{-x}$.
Soit y solution de E sur $\mathbb{R}$.
Comme y est solution sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0, y(x) = C^+\mathrm{e}^{-x} + x - 1 \text{ et } \forall x \leq 0, y(x) = C^-\mathrm{e}^{-x}.$$

Définition en 0 : $y(0) = C^+ - 1 = C^-$ donc $C^+ = C^- + 1$.
Dérivabilité en 0 : $y'(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} -C^+ + 1$ et $y'(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} -C^-$
donc $y'(0) = -C^+ + 1 = -C^-$.
Équation différentielle en 0 : $-C^+ + 1 + C^+ - 1 = \max(0,0)$: ok
Finalement, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ (C-1)\mathrm{e}^{-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Inversement : ok

Exercice 14 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0\,;+\infty[$.
Sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$,

$$\int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = 3\ln x + \ln|\ln x| + C^{te}.$$

Solution générale sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|.$$

Solution sur $]0\,;+\infty[$.
Soient $y\colon]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0\,;1[$ et $y(x) = \mu x^3 \ln x$ sur $]1\,;+\infty[$.
La continuité en 1 donne $y(1) = 0$ sans conditions sur λ et μ.
La dérivabilité en 1 donne $\lambda = \mu$.
Ainsi $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ qui est évidement solution.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = x\ln|x| + Cx \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pas de recollement possible en 0.

(b) Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = 1 + \frac{C}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = 1$.

(c) Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^4 + Cx^2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} C^+x^2 + \frac{1}{2}x^4 \text{ si } x \geq 0 \\ C^-x^2 + \frac{1}{2}x^4 \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } C^+, C^- \in \mathbb{R}.$$

(d) Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = \frac{1}{x} + C\frac{x^2+1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Via

$$\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \frac{2x^2 - (1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x}.$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = -x$.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Solution générale sur $I_k =]k\pi\,;(k+1)\pi[, k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \cos x + C\sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \cos x + C\sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

(b) Solution générale sur $I_k =]k\pi\,;(k+1)\pi[, k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = C\mathrm{e}^{1/\sin^2 x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} C_k \mathrm{e}^{1/\sin^2 x} \text{ si } x \in I_k \\ 0 \text{ si } x = k\pi \end{cases} \text{ avec } (C_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Soit $I =]-\pi/2\,;\pi/2[$ le plus grand intervalle contenant où l'équation différentielle a un sens.
Posons $I^+ =]0\,;\pi/2[$ et $I^- =]-\pi/2\,;0[$.
Solution générale sur I^+ : $y(x) = C^+ \sin x$.
Solution générale sur I^- : $y(x) = C^- \sin x$.
Cherchons les solutions définies sur I.
Analyse : Soit y une solution sur I, s'il en existe.
y est *a fortiori* solution sur I^+ et I^- donc :
$\exists C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = C^+ \sin x$ sur I^+ et $y(x) = C^- \sin x$ sur I^-.
Comme y doit être continue en 0, $\lim_{x\to 0+} y(x) = \lim_{x\to 0-} y(x) = y(0) = 0$.
Pas d'informations sur C^+ ni C^-.
Comme y doit être dérivable en 0,
$\lim_{x\to 0+} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^+ = y'(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^-$.
Donc $C^+ = C^-$. Finalement $y(x) = C^+ \sin x$ sur I entier.
Synthèse : $y(x) = C\sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$ est bien solution sur I.
On aura $y(0) = 0 \iff C.\sin(0) = 0$ ce qui est toujours vraie.
Il y a ici une infinité de solutions au problème de Cauchy.

(b) On aura $y(0) = 1 \iff C.\sin(0) = 1$ ce qui est impossible.
Il n'y a ici aucune solution au problème de Cauchy.

Exercice 18 : [énoncé]

Soit $I =]-\infty\,;-1[,]-1\,;0[,]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$.
Sur I, l'équation différentielle devient : $y' + \frac{2}{x(x^2-1)}y = \frac{x}{x^2-1}$.
La solution générale sur I est $\frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Après recollement en 1, 0 et -1 on conclut, pour tout intervalle I :
Si $1, 0, -1 \notin I, y(x) = \frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Si $1, -1 \notin I$ et $0 \in I$, $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2\ln|x| + C^+x^2}{x^2-1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{x^2\ln|x| + C^-x^2}{x^2-1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$ avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$.

Si $1 \in I$ ou $-1 \in I$, $y(x) = \frac{x^2\ln|x|}{x^2-1}$.

Exercice 19 : [énoncé]

Sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$: $y(x) = C|x|^\alpha$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
On a $y(x) = C^+x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y(x) = C^-|x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
Si $\alpha < 0$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.
Si $\alpha = 0$, la limite en 0 donne $C^+ = C^-$ et on conclut que y est constante.
Inversement ok.
Si $\alpha > 0$, la limite en 0 donne $y(0) = 0$.
On a $y'(x) = \alpha C^+x^{\alpha-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y(x) = -\alpha C^-|x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
Si $\alpha < 1$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.
Si $\alpha = 1$, la limite en 0 implique $C^+ = -C^-$ et on conclut que y est linéaire.
Inversement ok.
Si $\alpha > 1$, la limite en 0 existe et est nulle ce qui permet d'affirmer $y'(0) = 0$
L'équation différentielle est bien vérifiée en 0.

Inversement, lorsque $\alpha > 1$, la fonction définie par $y(x) = \begin{cases} C^+x^\alpha \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ C^-(-x)^\alpha \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est solution.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + xf(1) + x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to 0^+$, on a

$$\left|x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \le \|f'\|_{\infty,[0;1]}x|\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \to -f(0).$$

Quand $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x}\big(g(x) - g(0)\big) = \lambda - \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.
Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0;1]} \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.
L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0.
Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

L'intégrale $\int_{]0;1]} \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.

(b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2\varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+.
On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + xf(0) - f(0) + x\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0\,;+\infty[$ car φ y est de classe $\mathcal{C}^2$.
On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x\varphi(x) + \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to 0^+$, g' converge et donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x).$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2\frac{f(x)-f(0)}{x^3}$$

donc

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} f''(0).$$

On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;+\infty[$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}.$$

(b) Par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1/2\,;+\infty[$.
Pour $x \in]-1\,;1[$ on a le développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

et si $x \neq 0$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^n.$$

Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $]-1\,;1[$.
Ce prolongement est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ puis sur $]-1\,;+\infty[$.

(c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Ainsi f est solution de (E) sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) E est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = C|x|^\alpha.$$

Comme y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+|x|^\alpha \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^-|x|^\alpha.$$

(b) Si $\alpha < 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$ et alors $y(0) = 0$.

La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E.
Si $\alpha = 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} C^+ \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} C^-$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^-$ et alors $y(0) = C^+$.
La solution correspondante est une fonction constante qui inversement est solution de E.
Si $\alpha > 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

y peut être prolongée par continuité en 0 indépendamment de C^+ et C^- en posant $y(0) = 0$.

(c) Si $\alpha \in]0\,;1[$ alors

$$y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En vertu du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$.
La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E.
Si $\alpha = 1$ alors

$$y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} C^+ \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -C^-.$$

La fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = -C^-$.
La fonction correspondante est alors $x \mapsto C^+x$ sur $\mathbb{R}$ qui est solution de E.
Si $\alpha > 1$ alors

$$y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0.$$

La fonction prolongée est dérivable en 0 indépendamment de C^+ et C^-.
Cette fonction est alors solution de E sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle.

(d) Si $\alpha < 0$ ou $0 < \alpha < 1$: seule la fonction nulle est seule solution sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha = 0$ alors les fonctions constantes sont les solutions de E sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha = 1$ alors les fonctions linéaires($x \mapsto Cx$) sont les solutions de E sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha > 1$ alors les solutions de E sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} C^+|x|^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C^-|x|^\alpha & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$

Exercice 23 : [énoncé]
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant sur I l'équation différentielle

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

on obtient que $x \mapsto x^\lambda$ est une fonction propre de l'application φ. Pour une telle fonction, on a

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

donc en dérivant

$$xy''(x) + y'(x) - \lambda y'(x) = 0$$

puis

$$x^2y''(x) + xy'(x) - \lambda^2 y(x) = 0.$$

On en déduit que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{-\alpha}$ sont solutions sur I de l'équation différentielle E_α. Or cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'', son ensemble solution est donc un plan vectoriel. Puisque les deux précédentes fonctions sont des solutions indépendantes, elles constituent une base de ce plan vectoriel.
La solution générale de E_α est donc

$$y(x) = \lambda x^\alpha + \mu x^{-\alpha} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 24 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène : $y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-2t}$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)t\mathrm{e}^{-2t} + \mu(t)\mathrm{e}^{-2t}$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)t\mathrm{e}^{-2t} + \mu'(t)\mathrm{e}^{-2t} = 0 \\ \lambda'(t)(1-2t)\mathrm{e}^{-2t} - 2\mu'(t)\mathrm{e}^{-2t} = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{-t}{1+t^2}. \end{cases}$$

Les fonctions $\lambda(t) = \arctan t$ et $\mu(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ conviennent.
Finalement, la solution générale des l'équation étudiée est :

$$y(t) = t\arctan(t)\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\mathrm{e}^{-2t} + (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-2t}.$$

Exercice 25 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \tan t \end{cases}, \begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^2 t/\cos t \\ \mu'(t) = \sin t. \end{cases}$$

Les fonctions
$$\lambda(t) = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \sin t - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$
et
$$\mu(t) = -\cos t$$
conviennent car
$$\int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}.$$
Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est :
$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$$
sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Exercice 26 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \tan^2 t \end{cases}, \begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^3 t/\cos^2 t \\ \mu'(t) = \sin^2 t/\cos t. \end{cases}$$

Les fonctions
$$\lambda(t) = -\frac{1}{\cos t} - \cos t$$
et
$$\mu(t) = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t$$
conviennent car
$$\int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}.$$
Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est :
$$y(t) = -2 + \frac{1}{2}\sin t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$$
sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Exercice 27 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = A\cos x + B\sin x$.
Méthode de variation des constantes
$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \cot x. \end{cases}$$
Après résolution et intégration
$$y(x) = -\frac{1}{2}\sin x\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + A\cos x + B\sin x.$$

Exercice 28 : [énoncé]

(a) La solution générale de l'équation homogène associée est
$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t.$$
On peut avoir l'intuition de trouver une solution particulière de la forme $y(t) = \alpha\cos(nt)$ et, en effet on obtient,
$$y(t) = \frac{-1}{n^2-1}\cos(nt)$$
solution particulière lorsque $n \neq 1$. La solution générale est alors
$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + \frac{1}{1-n^2}\cos(nt).$$
Quand $n = 1$, on applique la méthode de variation des constantes. On obtient une solution particulière en résolvant
$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \cos(nt). \end{cases}$$
Par les formules de Cramer, on obtient
$$\lambda'(t) = -\sin t\cos t \text{ et } \mu'(t) = \cos^2(t).$$

Alors
$$\lambda(t) = -\frac{1}{2}\sin^2 t \text{ et } \mu(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2}$$
conviennent et l'on obtient la solution particulière
$$y(t) = \frac{t}{2}\sin t$$
puis la solution générale
$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + \frac{1}{2}t\sin t.$$

(b) Soit
$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2}t\sin t + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt).$$
Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergences simples intermédiaires. On peut alors conclure que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors
$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + f(t).$$

Exercice 29 : [énoncé]
Posons $g = f + f''$. f est évidemment solution de l'équation différentielle
$$y'' + y = g.$$
Après application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de cette équation est
$$y(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour une telle solution,
$$y(x+\pi) + y(x) = \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$
Ainsi f vérifie
$$f(x) + f(x+\pi) \geq 0.$$

Exercice 30 : [énoncé]
Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est.
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est
$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
Cette solution est 2π-périodique si, et seulement si,
$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille $(\sin,\cos)$ ainsi que la 2π-périodicité de f, cela équivaut à la condition
$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 31 : [énoncé]
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est
$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour conclure, il suffit de justifier que $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.
Par intégration par parties,
$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t) \geq 0$.
Puisque $-1 \leq \cos(x-t) \leq 1$,
$$f(0) - f(x) \leq \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t \leq f(x) - f(0)$$
puis
$$f(0)(1-\cos x) \leq \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t \leq 2f(x) - f(0)(1+\cos x).$$
La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 à coefficients constants de solution homogène
$$y = A\cos x + B\sin x.$$
La méthode de variation des constantes propose une solution particulière de la forme
$$y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$$
avec A et B fonctions dérivables solutions du système
$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1/x. \end{cases}$$
En faisant $\cos(x)\times(1) - \sin(x)\times(2)$, on détermine $A'(x)$ et $B'(x)$ s'obtient de façon analogue
$$\begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x. \end{cases}$$
On peut alors proposer
$$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } B(x) = -\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$
où les intégrales introduites ont le bon goût de converger...
La solution générale de l'équation différentielle est alors
$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-tx}/(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0\,;+\infty[$.
$x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t \in [0\,;+\infty[$
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$ et
$$\left|u(x,t)\right| \le \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$. Par domination f est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, $x \mapsto u(x,t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t \in [0\,;+\infty[$ avec
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}.$$
La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
La dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. On a
$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times[0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \le \frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} \le \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$
avec φ intégrable. Par domination sur tout segment, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et
$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
On vérifie alors
$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$
de sorte que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle
$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$
Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$f(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
On observe
$$0 \le f(x) \le \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$
donc par encadrement $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ce qui entraîne $A = B = 0$.
Ainsi
$$\forall x > 0, f(x) = \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
Séparément, on calcule $f(0)$
$$f(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Par convergence de l'intégrale, quand $x \to 0^+$
$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
De plus
$$\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = C^{te} + \int_x^1\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

avec
$$\left|\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$$
donc
$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \to 0.$$
Ainsi en passant à la limite en 0 l'expression précédente de $f(x)$, on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
La fonction S est solution sur $]-R\,;R[$ de l'équation différentielle
Sur $]-R\,;R[$,
$$S''(x) + 2xS'(x) + 2S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n)x^n.$$
Par conséquent, S est solution de l'équation différentielle
$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$
si, et seulement si,
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n$$
ce qui donne
$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!} a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)\dots 3} a_1 = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} a_1.$$
Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Une telle série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car $a_{2p} = \mathrm{O}(1/p!)$ et $a_{2p+1} = \mathrm{O}(4^p/p!)$.
De plus par les calculs ci-dessus elle est solution de l'équation différentielle proposée sur $\mathbb{R}$.

(b) Les solutions paires sont obtenue pour $a_{2p+1} = 0$. Cela donne
$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Exercice 34 : [énoncé]

Soit y la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R supposé > 0.
$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (4n^2-1)a_n)t^n$ donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{(n-1/2)(n+1/2)}{(n+1)(n+2)} a_n$$
donc $a_{2p} = \binom{1/2}{2p} a_0$ et $a_{2p+1} = \binom{1/2}{2p+1} a_1$.
Or personne, oh non personne, n'ignore que
$$\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} t^n \text{ et } \sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} t^n$$
avec un rayon de convergence égal à 1.
En prenant $a_0 = a_1 = 1$, on obtient la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$.
En prenant $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$, on obtient $t \mapsto \sqrt{1-t}$.
Ces deux fonctions sont solutions de l'équation étudiée (car $R = 1$) et, étant indépendantes, elles constituent un système fondamental de solutions. La solution générale s'exprime
$$y(t) = \lambda\sqrt{1+t} + \mu\sqrt{1-t}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) Soit $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière solution de rayon de convergence $R > 0$.
Sur $]-R\,;R[$, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et
$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$
de sorte que
$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n)t^n.$$
Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation étudiée sur $]-R\,;R[$ si, et seulement si,
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -a_n$$
ce qui donne
$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = (-1)^p a_0 \text{ et } a_{2p+1} = (-1)^p a_1$$

et on obtient

$$y(t) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2}.$$

Puisque la série entière écrite est de rayon de convergence $R \geq 1$, on peut assurer que les fonctions proposées sont solutions sur $]-1\,;1[$ à l'équation étudiée. Cela fournit un système fondamental de solutions sur $]-1\,;1[$ qu'il suffit de réinjecter dans l'équation pour affirmer que ces fonctions forment aussi un système fondamental de solution sur $\mathbb{R}$.
Puisque l'espace des solutions de cette équation homogène est de dimension 2, on peut conclure que la solution générale est

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1+t^2}.$$

(b) La méthode de variation des constantes nous amène à recherche une solution particulière

$$y(t) = \frac{\lambda(t) + \mu(t) t}{1+t^2}$$

avec λ et μ fonctions dérivables solution du système

$$\begin{cases} \frac{\lambda'(t)}{1+t^2} + \frac{\mu'(t)t}{1+t^2} = 0 \\ -\frac{2t\lambda'(t)}{(1+t^2)^2} + \frac{\mu'(t)(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

On obtient $\lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ puis

$$y(t) = \frac{t \arctan t - \ln\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}.$$

Cette solution particulière permet ensuite d'exprimer la solution générale.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Par analyse synthèse, on obtient

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.

(b) $h(0) = 1$ et h est continue sur $[0\,;2]$. Il suffit d'établir $h(2) < 0$ pour pouvoir conclure.
On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n$$

(on commence au rang 1 pour avoir la décroissance). On obtient alors

$$-2 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n < -1$$

car la somme peut être encadrée par des sommes partielles consécutives. On en déduit $h(2) < 0$.

(c) La fonction h est dérivable et

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!} x^{n-1}.$$

On peut à nouveau appliquer le critère spécial des séries alternées à cette série pour tout $x \in]0\,;2[$ et on en déduit $h'(x) < 0$.

Exercice 37 : [énoncé]
Par dérivation d'un déterminant

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) \end{vmatrix}$$

donc

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) - b(t)f_1(t) & -a(t)f_2'(t) - b(t)f_2(t) \end{vmatrix}$$

puis

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) & -a(t)f_2'(t) \end{vmatrix} = -a(t) \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Ainsi w est solution de l'équation différentielle

$$w' + a(t)w = 0.$$

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Un simple calcul de vérification.

(b) Le wronskien de deux solutions de l'équation homogène (E) est solution de l'équation différentielle
$$tw'(t) + (1-2t)w(t) = 0.$$
Après résolution, on obtient
$$w(t) = \lambda \frac{\mathrm{e}^{2t}}{t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Soit ψ une solution indépendante de φ (la théorie assure qu'il en existe) et w le wronskien de φ et ψ. Quitte à multiplier ψ par une constante ad hoc, on peut supposer
$$w(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{t}$$
et la fonction ψ apparaît solution de l'équation différentielle
$$\varphi\psi' - \psi\varphi' = w(t)$$
c'est-à-dire
$$\mathrm{e}^t\psi' - \mathrm{e}^t\psi = w(t).$$
Après résolution, on obtient
$$\psi(t) = \ln(t)\mathrm{e}^t.$$
Le couple (φ, ψ) constituant un système fondamental de solutions, on peut exprimer la solution générale
$$y(t) = (\lambda \ln(t) + \mu)\mathrm{e}^t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) f est continue, si f n'est pas de signe constant alors f s'annule.

(b) On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -q(x)f(x) \leq 0.$$

(c) L'équation est
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

(d) Considérons $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \big(f'(a)(x-a) + f(a)\big)$.
g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Or f' est décroissante, on peut donc dresser le tableau de variation de g et puisque $g(a) = 0$, constater
$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0.$$

(e) Si $f'(a) \neq 0$ alors f étant en dessous de sa tangente prend des valeurs négatives, c'est impossible.
On en déduit que
$$\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 0$$
donc f est constante et $f'' = 0$.
Pour que f vérifie l'équation
$$y'' + q(x)y = 0$$
(sachant $q \neq 0$) il est nécessaire que f soit constante égale à 0.
C'est absurde.

Exercice 40 : [énoncé]
Par l'absurde :
S'il existe y une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + q(x)y = 0$ qui ne s'annule pas.
Deux cas sont possibles : y est positive ou y est négative.
Si y est positive alors $y'' \leq 0$.
La fonction y est donc concave et sa courbe représentative est en dessous de chacune de ses tangentes.
Si y possède une tangente de pente non nulle, y prend des valeurs négatives, exclu.
Par suite y est nécessairement constante et alors $y'' = 0$ puis $q(x)y(x) = 0$ implique que y est constante égale à 0. Absurde.
Si y est négative, le même raisonnement permet de conclure.

Exercice 41 : [énoncé]
Par l'absurde, si f admet une infinité de zéros, on peut construire une suite (x_n) formée de zéros de f deux à deux distincts. Puisque $[a\,;b]$ est compact, on peut extraire de cette suite (x_n), une suite convergente que nous noterons encore (x_n).
Soit c la limite de (x_n). Par continuité, on a $f(c) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à f entre x_n et x_{n+1}, on détermine c_n compris entre x_n etx_{n+1} tel que $f'(c_n) = 0$. Par encadrement, $c_n \to c$ et par continuité $f'(c) = 0$.
Le problème de Cauchy linéaire formé par l'équation (E) et les conditions initiales
$$y(c) = 0 \text{ et } y'(c) = 0$$
possède une unique solution qui est la fonction nulle.
La fonction f est donc nulle : c'est absurde.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction q est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et puisque f est bornée, on peut affirmer que la fonction qf est intégrable sur $[0\,;+\infty[$. Par suite l'intégrale de l'expression précédente de $f'(x)$ converge quand $x \to +\infty$. On en déduit que f' converge en $+\infty$.
Posons ℓ sa limite.
Si $\ell > 0$ alors il existe A assez grand tel que pour tout $x \geq A$ on a $f'(x) \geq \ell/2$.
On a alors

$$f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geq f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse f bornée.
De même, $\ell < 0$ est absurde et il reste donc $\ell = 0$.

(b) En dérivant

$$w' = f''g + f'g' - f'g' - f''g = 0$$

car f et g sont solutions de (E).
On en déduit que le wronskien w est constant et puisque les fonctions f et g sont bornées, leurs dérivées f' et g' convergent vers 0 en $+\infty$ et donc $w \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
Ainsi le wronskien w est constant égal à 0 et donc les fonctions f et g sont liées.
On en déduit que l'équation différentielle E possède une solution non bornée.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Si φ_1 possède une solution non isolée x_0 alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de φ_1 deux à deux distincts convergeant vers x_0. En appliquant le théorème de Rolle entre les deux termes distincts x_n et x_{n+1}, on détermine une suite (c_n) convergeant vers x_0 formée de zéros de φ_1'. En passant la relation $\varphi'(c_n) = 0$ à la limite on obtient $\varphi'(x_0) = 0$. Ainsi φ_1 se comprend comme la solution du problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle $y'' + q_1(x) = 0$ et des conditions initiales $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Or ce problème de Cauchy possède une solution unique et celle-ci est la fonction nulle, cas que l'énoncé exclut.

(b) On suppose les zéros de a et b consécutifs donc φ_1 est de signe constant sur $[a\,;b]$.
Quitte à considérer $-\varphi_1$ on peut supposer $\varphi_1 \geq 0$ sur $[a\,;b]$ et, sachant $\varphi_1'(a), \varphi_1'(b) \neq 0$ car φ_1 est non identiquement nulle, on a $\varphi_1'(a) > 0$ et $\varphi_1'(b) < 0$.
Si φ_2 n'est pas de signe constant sur $[a\,;b]$ alors, par le théorème de valeurs intermédiaires, φ_2 s'annule sur $]a\,;b[$.
Si en revanche φ_2 est de signe constant sur $[a\,;b]$ alors, quitte à considérer $-\varphi_2$, on peut supposer $\varphi_2 \geq 0$ sur $[a\,;b]$ afin de fixer les idées. Considérons alors la fonction donnée par

$$w(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t).$$

La fonction w est décroissante car

$$w'(t) = \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2(t)\varphi_1''(t) = (q_1(t) - q_2(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leq 0.$$

Or $w(a) = -\varphi_2(a)\varphi_1'(a) \leq 0$ et $w(b) = -\varphi_2(b)\varphi_1'(b) \geq 0$ donc nécessairement $\varphi_2(a) = \varphi_2(b) = 0$.

(c) Il suffit d'appliquer ce qui précède à $q_1(x) = 1$ et $q_2(x) = \mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}_+$ sachant que $\varphi_1(x) = \sin(x - a)$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$ et s'annule en a et $a + \pi$.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}$. Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.
Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction u est alors positive et u'' est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction u' étant donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta).$$

En intégrant

$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta).$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$.
On en déduit que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$ (et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}_+^*$)
De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

(c) Considérons l'ensemble

$$A = \{t > 0 \mid u(t) = 0\}.$$

C'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure δ. Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \to \delta.$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A.
De même on obtient γ.

(d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0.$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.
Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta).$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma\,;\delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma\,;\delta[$.

(e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi\,;\delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

Exercice 45 : [énoncé]

(a) Par l'absurde, supposons que f s'annule et introduisons

$$b = \inf\{t \in [a\,;+\infty[\mid f(t) = 0\}.$$

Par continuité de f, on a $f(b) = 0$ et sachant $f(a) > 0$, on aussi.

$$\forall t \in [a\,;b], f(t) \geq 0.$$

On en déduit $f''(t) = q(t)f(t) \geq 0$ et donc f' est croissante sur $[a\,;b]$. Sachant $f'(a) > 0$, la fonction f est croissante sur $[a\,;b]$. Ceci est incompatible avec la valeur $f(b) = 0$. C'est absurde.
On en déduit que f ne s'annule pas sur $[a\,;+\infty[$ et est donc strictement positive. Comme au dessus, on retrouve que f' est croissante et donc strictement positive. Enfin

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geq f(a) + f'(a)(x-a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

(b) $(u'v - uv')' = u''v - uv'' = 0$. La fonction $u'v - uv'$ est donc constante égale à -1 (qui est sa valeur en a).
Puisque $v(a) = 0$ et $v'(a) = 1$, les fonctions v et v' sont strictement positives sur un intervalle de la forme $]a\,;a+h]$ (avec $h > 0$). En appliquant la question précédente avec $a+h$ plutôt que a, on assure que v et v' sont strictement positives sur $]a\,;+\infty[$. On peut donc introduire les fonctions u/v et u'/v'. Aussi

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2} \leq 0 \text{ et } \left(\frac{u'}{v'}\right)' = \frac{u''v' - u'v''}{v'^2} = \frac{q}{v'^2} \geq 0.$$

On a

$$\frac{u}{v} - \frac{u'}{v'} = \frac{uv' - u'v}{vv'} = \frac{1}{vv'}$$

avec $v \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $v' \geq v'(a) = 1$. On en déduit que les fonctions u/v et u'/v' ont la même limite en $+\infty$ (ces limites existent assurément par monotonie).
Aussi cette limite est finie car la fonction u/v est au dessus de la fonction u'/v'. Nous noterons ℓ cette limite.

(c) Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$g = \lambda u + \mu v$$

car (u, v) forme un système fondamentale de solutions de l'équation linéaire (E).
La condition $g(a) = 1$ impose $\lambda = 1$.

Les conditions g strictement positive et décroissante imposent respectivement

$$u+\mu v>0 \text{ et } u'+\mu v'\leq 0.$$

La constante μ est alors nécessairement $-\ell$.
Finalement $g=u-\ell v$. La réciproque est immédiate.

(d) Le changement de fonction proposé transpose l'équation $x^4y''(x)=y(x)$ en $z''(1/x)=z(1/x)$.
La solution générale de l'équation (E) sur $[1\,;+\infty[$ est donc

$$y(x)=x\big(\lambda \mathrm{e}^{1/x}+\mu\mathrm{e}^{-1/x}\big).$$

Par développement limité

$$y(x)\underset{x\to+\infty}{=}x\big((\lambda+\mu)+\mathrm{o}(1)\big).$$

Pour que la fonction g décroisse en restant positive, il est nécessaire que $\lambda+\mu=0$.
Sachant $y(1)=\lambda\mathrm{e}+\mu/\mathrm{e}$, on obtient

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}x}{\mathrm{e}^2-1}\big(\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}\big).$$

On aurait aussi pu calculer

$$u(x)=x\mathrm{e}^{1/x-1} \text{ et } v(x)=\frac{x}{2}\big(-\mathrm{e}^{1/x-1}+\mathrm{e}^{-1/x+1}\big)$$

et reprendre ce qui précède.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) En dérivant $u_1u_2=1$, on obtient $u_1'u_2+u_1u_2'=0$ ce qui permet d'établir que z_1 et z_2 sont deux fonctions opposées. Aussi

$$z_i'=\frac{u_i''u_i-u_i'^2}{u_i^2}=-\frac{pu_i'u_i+qu_i^2+u_i'^2}{u_i^2}$$

et donc z_i est solution de l'équation différentielle

$$(E_2)\colon z'+p(t)z+z^2+q(t)=0.$$

(b) *Analyse:* Si l'équation (E_1) admet deux solutions u_1 et u_2 avec $u_1u_2=1$ alors (E_2) admet deux solutions opposées z_1 et $z_2=-z_1$:

$$z_1'+pz_1+z_1^2+q=0 \quad\text{et}\quad z_2'+pz_2+z_2^2+q=0.$$

La différentce et la somme de ces deux équations donnent

$$z_1'+pz_1=0 \quad\text{et}\quad z_1^2+q=0.$$

On en déduit $q\leq 0$ et $z_1z_1'+pz_1^2=0$ donne $q'+2pq=0$. Notons que si la fonction q s'annule, l'équation différentielle précédente assure que q est la fonction nulle. *Synthèse:* Si la fonction q est nulle l'équation (E_1) admet des solutions constantes et, parmi celles-ci, il figure des solutions dont le produit vaut 1. Si la fonction q est strictement négative et vérifie $q'+2pq=0$, on peut introduire $z=\sqrt{-q}$ et on observe $z'=-pz$ car

$$2zz'=(-q)'=2pq=-2pz^2.$$

Si u est une solution non nulle de l'équation différentielle $u'=uz$, elle ne s'annule pas et on vérifie par le calcul que u et $1/u$ sont solutions de l'équation (E_1).
En résumé, l'équation (E_1) admet deux solutions dont le produit vaut 1 si, et seulement si, q est une fonction négative vérifiant $q'+2pq=0$.

(c) La condition précédente est vérifiée pour

$$p(t)=-\frac{2\sin(4t)}{1+\cos(4t)}=\frac{2\sin(2t)}{\cos(2t)} \quad\text{et}\quad q(t)=-\frac{8}{1+\cos(4t)}=-\frac{4}{\cos^2(2t)}.$$

En adaptant les calculs qui précèdent, on obtient une solution u en prenant

$$u'=uz \quad\text{avec}\quad z=\frac{2}{\cos(2t)}$$

et on parvient à

$$u(t)=\sqrt{\frac{1-\sin(2t)}{1+\sin(2t)}}=\frac{1-\sin(2t)}{\cos(2t)}.$$

La fonction inverse est aussi solution et on peut exprimer la solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$x(t)=\frac{\lambda\big(1-\sin(2t)\big)+\mu\big(1+\sin(2t)\big)}{\cos(2t)}.$$

Exercice 47 : [énoncé]
Supposons f solution.

$$f(x)=-1-2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a $f(0) = -1$ et f dérivable avec

$$f'(x) = -2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2xf(x) + xf(x).$$

Par suite $y\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$. Ceci détermine y et donc f de manière unique.
En recherchant les solutions développables en séries entières, on obtient
$y(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ puis

$$f(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Exercice 48 : [énoncé]

(a) On peut écrire

$$f(x) = 1 - x - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Soit f solution. f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi la fonction f est de la forme

$$f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x.$$

De plus, on observe $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ ce qui détermine λ et μ :

$$\lambda = 1 \text{ et } \mu = -1.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto \cos x - \sin x$ est solution, soit en remontant les calculs (ce qui est possible) soit en refaisant ceux-ci.

Exercice 49 : [énoncé]
Si f est solution alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$f'(x) = xf(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, on obtient

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

Inversement, $f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}$ définit une solution du problème posé.

Exercice 50 : [énoncé]
Remarquons

$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$$

Si f est solution alors

$$f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $f(0) = 1$.
f est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + 2f(x)$$

et $f'(0) = 2$.
f est alors deux fois dérivable et

$$f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x).$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 1$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x + 1.$$

Cela conduit à $f(x) = 2x\mathrm{e}^x + 1$.
Inversement, soit par calculs, soit en remontant le raisonnement, on peut affirmer que la fonction proposée est solution.

Exercice 51 : [énoncé]
Soit f une solution du problème posé.
Posons $g(x) = f(x) + f(-x)$. La fonction g est une fonction paire, deux fois dérivable et solution de : $y'' + y = 0$. Par suite $g(x) = C\cos(x)$
Posons $h(x) = f(x) - f(-x)$. La fonction h est une fonction impaire, deux fois dérivable et solution de : $y'' - y = 2x$. Par suite $h(x) = D\operatorname{sh} x - 2x$.
On en déduit $f(x) = C\cos x + D\operatorname{sh} x - x$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 52 : [énoncé]
Soit f une fonction solution. f est dérivable et

$$f'(x) = f(1/x)$$

donc f' est encore dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'(1/x) = -\frac{1}{x^2}f(x).$$

La fonction f apparaît alors comme étant solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$E\colon x^2y'' + y = 0$$

E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.
Soient $y\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$z(t) = y(\mathrm{e}^t)$$

z est deux fois dérivable et

$$y(x) = z(\ln x).$$

$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x).$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$$

y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de E si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$F\colon z'' - z' + z = 0$$

F est un équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale

$$z(x) = \left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\mathrm{e}^{x/2}.$$

La solution générale de E sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc

$$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right).$$

Revenons à la fonction f. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right).$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\lambda + \mu\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

et donc

$$f'(x) = f(1/x) \iff \begin{cases}\lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda \\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu\end{cases} \iff \lambda = \mu\sqrt{3}.$$

Finalement, les solutions sont les fonctions f données par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 53 : [énoncé]
Les éléments de E sont les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \alpha\cos(x) \text{ vérifiant } y(0) = \alpha.$$

L'équation différentielle est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
La fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x\sin x$ est solution particulière et la solution générale est

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{\alpha}{2}x\sin x.$$

Les solutions vérifiant la condition $y(0) = \alpha$ sont les fonctions données par

$$y(x) = \alpha\left(\cos x + \frac{1}{2}x\sin x\right) + \mu\sin x.$$

On en déduit que l'espace E est de dimension 2.

Exercice 54 : [énoncé]
Soit u une fonction solution.
Posons
$$U(x) = \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t.$$
La fonction U est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie
$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U'(x) = \lambda U(x) + f(x). \end{cases}$$
La résolution de l'équation différentielle linéaire $U' = \lambda U + f(x)$ donne par pour solution générale
$$U(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x} + \left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$
La condition initiale $U(0) = 0$ déterminer la constante C
$$C = 0.$$
On en déduit la fonction u
$$u(x) = f(x) - \lambda \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\lambda(t-x)}\,\mathrm{d}t.$$
Inversement, une telle fonction est solution car sa primitive s'annulant en 0 vérifie l'équation $U' = \lambda U + f(x)$.

Exercice 55 : [énoncé]
Soit f solution.
En prenant $x = 0$ dans la relation, on observe que f est nécessairement paire.
En dérivant la relation deux fois par rapport à x on obtient
$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y).$$
En dérivant la relation deux fois par rapport à y on obtient
$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$
On en déduit
$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$
Pour $y = 0$, on obtient l'équation $f''(x) = \lambda f(x)$ avec $\lambda = f''(0)$.
Si $\lambda > 0$ alors $f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x$.
Si $\lambda = 0$ alors $f(x) = 1$.
Si $\lambda < 0$ alors $f(x) = \cos\sqrt{-\lambda}x$
Inversement, on vérifie par le calcul qu'une fonction de la forme précédente est solution du problème posé.

Exercice 56 : [énoncé]
Sur $I = \left]-\infty\,;-1\right[$ ou $\left]-1\,;+\infty\right[$ l'espace des solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un plan vectoriel. En recherchant ses solutions polynomiale on obtient les fonctions $y(t) = a(t^2-1) + b(t+1)$. Les deux fonctions polynomiales $t \mapsto t^2 - 1$ et $t \mapsto t+1$ sont solutions et indépendantes, elles constituent un système fondamental de solution de l'équation sur I. Reste à recoller celles-ci en -1.
Si y est solution sur $\mathbb{R}$, elle est *a fortiori* solution sur $\left]-\infty\,;-1\right[$ et $\left]-1\,;+\infty\right[$ donc il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > -1, y(t) = a_1(t^2-1) + b_1(t+1)$ et $\forall t < -1, y(t) = a_2(t^2-1) + b_2(t+1)$.
Recherchons parmi les fonctions de la forme précédente celles pouvant être prolongée en une fonction deux fois dérivable en -1
Limite en -1 : $\lim_{t\to-1^+} y(t) = 0$ et $\lim_{t\to-1^-} y(t) = 0$. On peut prolonger y en -1 en posant $y(-1) = 0$.
$\forall t > -1, y'(t) = 2a_1 t + b_1$ et $\forall t > -1, y'(t) = 2a_2 t + b_2$.
Limite en -1 : $\lim_{t\to-1^+} y'(t) = -2a_1 + b_1$ et $\lim_{t\to-1^-} y(t) = -2a_2 + b_2$. La fonction y est dérivable en -1 si, et seulement si, $-2a_1 + b_1 = -2a_2 + b_2$. Si tel est le cas :
$\forall t > -1, y''(t) = 2a_1$ et $\forall t < -1, y''(t) = 2a_2$.
Limite en -1 : $\lim_{t\to-1^+} y''(t) = 2a_1$ et $\lim_{t\to-1^-} y''(t) = 2a_2$. La fonction y est deux fois dérivable en -1 si, et seulement si, $2a_1 = 2a_2$.
Au final y peut être prolongée en une fonction deux fois dérivable si, et seulement si, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.
La fonction y est alors donnée par $y(t) = a_1(t^2-1) + b_1(t+1)$ sur $\mathbb{R}$ et elle bien solution de l'équation.
Finalement les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions
$$y(t) = a(t^2-1) + b(t+1) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 57 : [énoncé]
On remarque
$$(t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0 \iff (t+1)(y'-y)' - (y'-y) = 0.$$
Les fonctions $y(t) = \mathrm{e}^t$ et $y(t) = t+2$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ et elles sont indépendantes.
Par suite, sur $I = \left]-\infty\,;-1\right[$ ou $\left]-1\,;+\infty\right[$, la solution générale est
$$y(t) = \lambda\mathrm{e}^t + \mu(t+2)$$
car on sait que l'espace des solutions est de dimension 2.
Après recollement en -1, la solution générale sur $\mathbb{R}$ est
$$y(t) = \lambda\mathrm{e}^t + \mu(t+2) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 58 : [énoncé]

(a) $z\colon x \mapsto y(-x)$ est deux fois dérivable sur I' et vérifie bien l'équation.

(b) Soient y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et z définie par $z(t) = y(\sqrt{t})$ de sorte que $y(x) = z(x^2)$. z est deux fois dérivable.
On a $y'(x) = 2xz'(x^2)$ et $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2)$.
y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si,

$$4z'' - z = 0.$$

Cela donne

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(c) Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée.
Puisque y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ on peut écrire :

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \lambda_2 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_2 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Puisque y est continue en 0

$$\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2$$

y' est continue en 0 ne donne rien de plus

$$y''(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} \lambda_1 - \mu_1 \text{ et } y''(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} \lambda_2 - \mu_2.$$

Donc $y''(0) = \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2$ d'où $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.
Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Inversement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Sur $]-R\,;R[$, la fonction $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \text{ et } y'' = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}.$$

On a alors

$$4xy'' + 2y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(2(2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n\big)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(2n)!}a_0.$$

Inversement, la série entière donnée par $\sum \frac{a_0}{(2n)!}x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$ et en vertu des calculs qui précèdent, sa somme est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

(b) Considérons $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et posons $x = \varepsilon t^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$.
Soit $y\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\varepsilon t^2)$.
La fonction z est deux fois dérivable et

$$z(t) = y(\varepsilon t^2), z'(t) = 2\varepsilon t y'(\varepsilon t^2) \text{ et } z''(t) = 4t^2y''(\varepsilon t^2) + 2\varepsilon y'(\varepsilon t^2)$$

de sorte que

$$\varepsilon z''(t) - z(t) = 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x).$$

Ainsi y est solution de (E) sur I si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $\varepsilon z'' - z = 0$. La solution générale de cette dernière est $z(t) = \lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t$ si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ si $I = \mathbb{R}_-^*$. La solution générale de (E) sur I est donc

$$y(x) = \lambda \operatorname{ch}\big(\sqrt{x}\big) + \mu \operatorname{sh}\big(\sqrt{x}\big) \quad \text{sur } I = \mathbb{R}_+^*$$

et

$$y(x) = \lambda \cos\big(\sqrt{|x|}\big) + \mu \sin\big(\sqrt{|x|}\big) \quad \text{sur } I = \mathbb{R}_-^*.$$

(c) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On peut écrire

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda \operatorname{ch}\big(\sqrt{x}\big) + \mu \operatorname{sh}\big(\sqrt{x}\big)$$

et

$$\forall x < 0, y(x) = \lambda' \cos\big(\sqrt{|x|}\big) + \mu' \operatorname{sh}\big(\sqrt{|x|}\big).$$

Le raccord par continuité exige $\lambda = \lambda'$.
La dérivabilité du raccord exige $\mu = \mu' = 0$.
La fonction ainsi obtenue correspond alors au développement en série entière initiale qu'on sait être solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 60 : [énoncé]
Soit $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z = y' - y$.
z est dérivable et $z' = y'' - y'$.
y est solution de E si, et seulement si, z est solution de $F\colon xz' - z = 1$.
F est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Solution générale de F sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$: $z(x) = Cx - 1$.
Après recollement, solution générale de F sur $\mathbb{R}$: $z(x) = Cx - 1$.
Reste à résoudre $G\colon y' - y = Cx - 1$.
Solution homogène : $y_0(x) = D\mathrm{e}^x$.
Solution particulière $y_1(x) = -C(x+1) + 1$.
Solution générale de E : $y(x) = -C(x+1) + D\mathrm{e}^x + 1$ avec $C, D \in \mathbb{R}$.

Exercice 61 : [énoncé]
Soit $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z = y'$, z est dérivable.
y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, z solution de

$$(1+x^2)z' + 2xz = 0.$$

On obtient

$$z(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

puis

$$y(x) = C\arctan x + D.$$

Exercice 62 : [énoncé]
Soit $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$z(x) = \frac{y(x)}{1+\mathrm{e}^x}.$$

La fonction z est deux fois dérivable.
On a $y(x) = (1+\mathrm{e}^x)z(x)$, $y'(x) = (1+\mathrm{e}^x)z'(x) + \mathrm{e}^x z(x)$,
$y''(x) = (1+\mathrm{e}^x)z''(x) + 2\mathrm{e}^x z'(x) + \mathrm{e}^x z(x)$.
y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si, $z'' - z = 0$.
On obtient pour solution générale de l'équation $z'' - z = 0$

$$z(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$$

et on en déduit la solution générale de l'équation étudiée

$$y(x) = (C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^x).$$

Exercice 63 : [énoncé]
Soit $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z\colon x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}y(x)$, z est deux fois dérivable.
y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, z solution de
$z'' + z = 0$.
On obtient

$$z(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

et on en déduit

$$y(x) = (C_1\cos x + C_2\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Exercice 64 : [énoncé]
Soit $y\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
Posons $z\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = x^2y(x)$. z est deux fois dérivable.
$z'(x) = x^2y'(x) + 2xy(x)$, $z''(x) = x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x)$.
On observe $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0 \iff z'' - z = 0$
La solution générale de l'équation $z'' = z$ est $z(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x}$.
La solution générale de l'équation initiale est donc $y(x) = \frac{\lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$.

Exercice 65 : [énoncé]
Soit $y\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$z(x) = x^{-\alpha}y(x).$$

La fonction z est deux fois dérivable et

$$y'(x) = x^\alpha z'(x) + \alpha x^{\alpha-1}z(x), y''(x) = x^\alpha z''(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}z'(x) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x)$$

donc

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = x^{\alpha+1}z''(x) + 2(\alpha+1)x^\alpha z'(x) + \big(\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} - x^{\alpha+1}\big)z(x).$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = z''(x) - z(x)$$

et donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$z(x) = \lambda\operatorname{ch} x + \mu\operatorname{sh} x$$

ce qui donne la solution générale

$$y(x) = \frac{\lambda\operatorname{ch} x + \mu\operatorname{sh} x}{x}.$$

Exercice 66 : [énoncé]
Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $]0\,;+\infty[$ et z la fonction définie par $z(x) = xy'(x) + y(x)$. z est dérivable. y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de

$$x.z' - 2z = -\frac{3}{x}.$$

Après résolution de cette équation différentielle :

$$z(x) = Cx^2 + \frac{1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Par suite

$$xy'(x) + y(x) = Cx^2 + 1/x.$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$y(x) = \frac{C'}{x} + \frac{1}{3}Cx^2 + \frac{\ln x}{x} \text{ avec } C, C' \in \mathbb{R}.$$

Inversement les fonctions proposées sont bien solutions.

Exercice 67 : [énoncé]

(a) L'équation homogène associée est

$$(t^2+1)y'' - 2y = 0.$$

La fonction $\varphi(t) = t^2 + 1$ en est solution sur $\mathbb{R}$.

(b) Procédons au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.
On obtient

$$(t^2+1)z''(t) + 4tz'(t) = 0$$

qui donne

$$z'(t) = \frac{\lambda}{(t^2+1)^2}.$$

Sachant

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}$$

on obtient

$$z(t) = \frac{\lambda}{2}\left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1}\right) + \mu$$

ce qui donne la solution homogène

$$y(t) = \frac{\lambda}{2}\big((t^2+1)\arctan t + t\big) + \mu(t^2+1)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(c) $y(t) = -t/2$ est solution particulière donc la solution générale est

$$y(t) = \lambda(t^2+1) + \mu((t^2+1)\arctan t + t) - \frac{1}{2}t$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 68 : [énoncé]

(a) Si y est un polynôme unitaire de degré n solution de l'équation homogène, le coefficient de t^{n+2} dans le premier membre de l'équation est

$$n(n-1) - 2n + 2 = n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$$

et donc nécessairement $n \leq 2$.
Pour $\varphi(t) = at^2 + bt + c$, le premier membre de l'équation devient :

$$2a(1+t^2)^2 - 2t(2at+b)(1+t^2) + 2(t^2-1)(at^2+bt+c) = (2c-2a)t^2 - 4bt + (2a-2c)$$

d'où $a = c$ et $b = 0$
Finalement $\varphi(t) = t^2 + 1$ est solution particulière.

(b) Par le changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$, on parvient à l'équation

$$(1+t^2)^3 z''(t) + 2t(1+t^2)^2 z'(t) = (1+t^2).$$

Après résolution de cette équation d'ordre 1 en l'inconnue z', on obtient

$$z'(t) = \frac{\lambda + \arctan t}{(1+t^2)}$$

puis

$$z(t) = \mu + \lambda \arctan t + \frac{1}{2}(\arctan t)^2.$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t) = \lambda(1+t^2)\arctan t + \mu(1+t^2) + \frac{1}{2}(1+t^2)(\arctan t)^2.$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) $\varphi(t) = t$ est évidemment solution particulière.

(b) On pose le $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^4 z'' + t^2(2t+1)z' = 0.$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z' puis on intègre pour obtenir

$$z(t) = \lambda e^{1/t} + \mu.$$

Finalement la solution générale est

$$y(t) = \lambda t e^{1/t} + \mu t.$$

Exercice 70 : [énoncé]

(a) $\varphi(t) = t$ est solution remarquable.

(b) En posant $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^3 z'' + 3t^2 z' = 1.$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z'

$$z'(t) = \frac{\lambda}{t^3} + \frac{1}{t^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

et l'on obtient

$$z(t) = \frac{\lambda'}{t^2} + \mu - \frac{1}{t} \text{ avec } \lambda', \mu \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale est

$$y(t) = \frac{\lambda}{t} + \mu t - 1 \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y_1 sur $]-R\,;R[$.
Pour tout $x \in \,]-R\,;R[$, on a

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3 y(x) = 3a_1 + 8a_2 x + 21 a_3 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \big((n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3}\big)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on peut affirmer que y est solution de E sur $]-R\,;R[$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ \forall n \geq 3, a_{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+3)} a_{n-3}. \end{cases}$$

Posons $a_0 = 1$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{4p} = \frac{1}{2p(2p+1)} a_{4(p-1)}$, les autres a_n nuls. Ainsi

$$a_{4p} = \frac{1}{(2p+1)!}, a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0.$$

La série entière correspondante est de rayon de convergence $R = +\infty$ et sa somme

$$\varphi\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle E en vertu des calculs qui précèdent.
Pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{x^2}.$$

(b) On pose $y(x) = \varphi(x)z(x)$ et l'équation (E) devient

$$z''(x) = \left(\frac{1}{x} - 4x\frac{\operatorname{ch}(x^2)}{\operatorname{sh}(x^2)}\right)z'(x).$$

Après résolution en la fonction inconnue z' on obtient

$$z'(x) = \frac{\lambda x}{\operatorname{sh}^2(x^2)}$$

puis

$$z(x) = -\frac{\lambda}{2}\frac{\operatorname{ch}(x^2)}{\operatorname{sh}(x^2)} + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation est alors

$$y(x) = \frac{\lambda \operatorname{sh}(x^2) + \mu \operatorname{ch}(x^2)}{x^2} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y sur $]-R\,;R[$
Pour tout $x \in \,]-R\,;R[$, on a

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)x^n.$$

La fonction y est donc solution de l'équation différentielle étudiée si, et seulement si,

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n.$$

Inversement, en considérant la fonction $\varphi\colon x \mapsto \frac{x}{1-x}$, on obtient une fonction développable en série entière avec un rayon de convergence $R = 1$ et les calculs qui précèdent assure que y est solution sur $]-1\,;1[$ de l'équation étudiée.

(b) On pose

$$y(x) = \frac{xz(x)}{1-x}.$$

Après calculs, la fonction y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$xz''(x) + z'(x) = 0.$$

Après résolution de cette équation en l'inconnue z', on obtient

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

puis en intégrant

$$z(x) = \lambda \ln x + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = \frac{(\lambda \ln x + \mu)x}{1-x}.$$

Exercice 73 : [énoncé]

(a) Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x + \frac{x^2}{3}.$$

(b) Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{x}{2}.$$

Exercice 74 : [énoncé]
$x = \cos t, t = \arccos x, x \in]-1\,;1[, t \in]0\,;\pi[$.
Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $]-1\,;1[$.
Posons z la fonction définie sur $]0\,;\pi[$ par $z(t) = y(x) = y(\cos t)$.
z est deux fois dérivable.
Après calculs :
y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle $z'' + 4z = t$ *i.e.*

$$z(t) = \lambda \cos 2t + \mu \sin 2t + \frac{1}{4} t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On en déduit

$$y(x) = \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arccos x \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 75 : [énoncé]
Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.
Posons z la fonction définie sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$ par $z(t) = y(x) = y(\tan t)$.
z est deux fois dérivable.
Après calculs :
y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation $z'' - 2z' + z = 0$ *i.e.* $z(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On en déduit $y(x) = (\lambda \arctan x + \mu)\mathrm{e}^{\arctan x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 76 : [énoncé]
Soient y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z\colon I =]-\pi/2\,;\pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(\tan x)$.
z est deux fois dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(\arctan t)$.
$y'(t) = \frac{z'(\arctan t)}{1+t^2}$ et $y''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}z'(\arctan t) + \frac{1}{(1+t^2)^2}z''(\arctan t)$.
y est solution si, et seulement si,

$$z''(\arctan t) + z(\arctan t) = t$$

soit $z''(x) + z(x) = \tan x$ sur I.
$z'' + z = 0$ donc $z = \lambda \cos x + \mu \sin x$.
Méthode de la variation des constantes : $\lambda'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ et $\mu'(x) = \sin x$.

$$\int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} + C.$$

Prenons $\lambda(x) = \sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ et $\mu(x) = -\cos x$.
On obtient : $z(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cos x$ solution particulière.
Finalement

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{\sqrt{1+t^2}+t}.$$

Exercice 77 : [énoncé]
Soient $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme.
Posons $y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie de sorte que $y(u) = x(t)$ *i.e.* $y(u) = x(\varphi^{-1}(u))$.
La fonction y est deux fois dérivable et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x(t) = y(\varphi(t))$.
On a alors $x'(t) = \varphi'(t)y'(\varphi(t))$ et $x''(t) = \big(\varphi'(t)\big)^2 y''(\varphi(t)) + \varphi''(t)y'(\varphi(t))$.
Par suite

$$(1+t^2)x''(t)+tx'(t)+a^2x(t) = (1+t^2)\varphi'(t)^2y''(\varphi(t))+\big((1+t^2)\varphi''(t)+t\varphi'(t)\big)y'(\varphi(t))+a^2y(\varphi(t)).$$

Pour $\varphi(t) = \operatorname{argsh} t$, $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $(1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0$ de sorte que

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = 0 \iff y''(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t)) = 0.$$

Cela nous amène à résoudre l'équation

$$y''(u) + a^2y(u) = 0.$$

Si $a\neq 0$, la solution générale de $y''(u) + a^2y(u) = 0$ est
$y(u) = \lambda\cos(au) + \mu\sin(au)$ et la solution générale de $(1+t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$ est

$$x(t) = \lambda\cos(a\operatorname{argsh} t) + \mu\sin(a\operatorname{argsh} t) \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Si $a = 0$, on parvient à

$$x(t) = \lambda + \mu\operatorname{argsh} t \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice 78 : [énoncé]
$P = (x+1)X - 1$ convient.

$$(E) \iff (x+1)z' - z = (3x+2)\mathrm{e}^{3x}.$$

Après résolution avec recollement la solution générale de cette dernière équation est $z(x) = \lambda(x+1) + \mathrm{e}^{3x}$.

$$(E) \iff y' - 3y = \lambda(x+1) + \mathrm{e}^{3x}.$$

La solution générale est

$$y(x) = \lambda'(3x+4) + \mu\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{3x}.$$