Probabilités

Tribu

Exercice 1 [03995] [Correction]
Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω.
Vérifier que $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathcal{T}\}$ définit une tribu sur Ω'.

Exercice 2 [03997] [Correction]
Soient $f\colon \Omega \to \Omega'$ une application et $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω'. Vérifier que

$$\mathcal{T} = \left\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{T}'\right\}$$

définit une tribu sur Ω.

Exercice 3 [03998] [Correction]

(a) Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribu sur un même ensemble Ω.
Montrer que

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

est une tribu sur Ω.

(b) Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ la famille de toutes les tribus de Ω contenant les éléments de $\mathcal{S}$.
Vérifier que

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

est une tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$ et que c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété.

Exercice 4 [03999] [Correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

(a) Vérifier que

$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n$$

est un évènement. À quelle condition simple sur la suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'évènement A sera-t-il réalisé ?

(b) Même question avec

$$A' = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n.$$

Exercice 5 [04006] [Correction]
Soit Ω un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de Ω vérifiant

$$n \neq m \implies A_n \cap A_m = \emptyset \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega.$$

On pose

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{n\in T} A_n \,\middle|\, T \in \wp(\mathbb{N}) \right\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω.

(b) On suppose l'ensemble Ω dénombrable.
Montrer que toute tribu infinie sur Ω est de la forme ci-dessus pour une certaine famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Existe-t-il des tribus dénombrables ?

Exercice 6 [04007] [Correction]
Dans ce sujet dénombrable signifie « au plus dénombrable ».
Soit Ω un ensemble. On introduit

$$\mathcal{T} = \left\{A \subset \Omega \mid A \text{ ou } \overline{A} \text{ est dénombrable}\right\}.$$

(a) Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

(b) Justifier que $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant les singletons $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.

(c) Vérifier que si Ω est dénombrable alors $\mathcal{T} = \wp(\Omega)$.

Exercice 7 [04008] [Correction]
Soit une application $f\colon \Omega \to \Omega'$ et l'ensemble

$$\mathcal{T} = \left\{ A \subset \Omega \,\middle|\, A = f^{-1}\big(f(A)\big) \right\}.$$

Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

Définition d'une probabilité

Exercice 8 [04002] [Correction]
Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N},\wp(\mathbb{N}))$.
Montrer que
$$\mathrm{P}(\{n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 9 [04016] [Correction]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Déterminer $\lambda\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\big(\mathbb{N},\wp(\mathbb{N})\big)$ vérifiant
$$\mathrm{P}\big(\{n,n+1,\dots\}\big)=\lambda a_n.$$

Exercice 10 [04009] [Correction]
Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$ un espace probabilisé. Pour $A,B\in\mathcal{T}$, on pose
$$d(A,B)=\mathrm{P}(A\Delta B)$$
avec $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par
$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

(a) Vérifier
$$d(A,C)\le d(A,B)+d(B,C).$$

(b) En déduire
$$\big|\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\big|\le\mathrm{P}(A\Delta B).$$

Calcul de probabilité d'événements

Exercice 11 [04098] [Correction]
On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement

« on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n-ième lancer »

et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

(a) Déterminer a_1,a_2 et a_3.
(b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n\ge 1$.
(c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.
(d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 12 [04110] [Correction]
Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur
$$p_n=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\text{ avec }\lambda\simeq 2.$$
En supposant les sexes équiprobables et l'indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille, donner une estimation de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

Exercice 13 [05000] [Correction]
On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n\ge 2$, on introduit les événements :

A_n = « On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences »,
B_n = « On obtient le premier couple de succès consécutifs aux rangs $n-1$ et n ».

Enfin, on pose $p_n=\mathrm{P}(B_n)$ et $p_1=0$.

(a) Calculer p_2, p_3 et p_4.
(b) Pour $n\ge 2$, vérifier
$$\mathrm{P}(A_n)=\sum_{k=1}^n p_k\quad\text{et}\quad p_{n+3}=\frac{1}{8}\left(1-\sum_{k=1}^n p_k\right).$$
(c) En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n valable pour tout $n\ge 1$.
(d) Exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\ge 1}$.

Probabilités composées

Exercice 14 [03996] [Correction]
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

(a) Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?
(b) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?
(c) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Probabilités conditionnelles

Exercice 15 [04014] [Correction]
Chaque jour du lundi au vendredi, le professeur Zinzin a la probabilité $p \in]0\,;1[$ d'oublier ses notes de cours en classe. Peu lui importe car il improvise à chaque cours, mais ce vendredi soir il ne les retrouve plus et ça le contrarie. Il est cependant certain de les avoir eu en sa possession lundi matin.

(a) Quelle est probabilité que le professeur Zinzin ait perdu ses notes de cours dans la journée de Lundi ?

(b) Quel est le jour le plus probable où eu lieu cette perte ?

Exercice 16 [04015] [Correction]
Deux entreprises asiatiques produisent des « langues de belle-mère » en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, dans la proportion p_1 pour la première entreprise, dans la proportion p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles. Il souffle dans une première et celle-ci fonctionne : le voilà prêt pour fêter le nouvel an !

(a) Quelle est la probabilité pour qu'une seconde langue de belle-mère choisie dans le même sachet fonctionne ?

(b) Quelle est la probabilité que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?

Exercice 17 [04147] [Correction]
Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par la formule

$$p_n = a\frac{2^n}{n!} \text{ avec } a > 0.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou garçon.

(b) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.

(c) On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?

Événements Indépendants

Exercice 18 [04013] [Correction]

(a) Soit $(A_1,\dots,A_n)$ une famille d'évènements mutuellement indépendants. Pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$, on pose $\widetilde{A_i} = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Vérifier la famille $(\widetilde{A_1},\dots,\widetilde{A_n})$ est constituée d'évènements mutuellement indépendant.

(b) Etendre le résultat au cas d'une famille $(A_i)_{i\in I}$.

Exercice 19 [04081] [Correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(A_n)\right).$$

Exercice 20 [04109] [Correction]
Soient $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

(a) Démontrer

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\overline{A_k}).$$

(b) On suppose $\mathrm{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{P}\big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\big) = 1$;
(ii) $\sum\ln\big(\mathrm{P}(\overline{A_n})\big)$ diverge ;
(iii) $\sum\mathrm{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 21 [04947] [Correction]
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

(a) Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $\left(\lambda n^{-s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

(b) Pour p nombre premiers, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.

(c) Prouver

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

(d) La famille $(1/p)_{p \in \mathcal{P}}$ est-elle sommable ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
$\Omega' = \Omega \cap \Omega'$ avec $\Omega \in \mathcal{T}$ donc $\Omega' \in \mathcal{T}'$.
Soit $B \in \mathcal{T}'$. On peut écrire $B = A \cap \Omega'$ avec $A \in \mathcal{T}$ et alors $\Omega' \setminus B = \overline{A} \cap \Omega'$ avec $\overline{A} \in \mathcal{T}$. Ainsi le complémentaire de B dans Ω' est élément de $\mathcal{T}'$.
Soit (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{T}'$. On peut écrire $B_n = A_n \cap \Omega'$ avec $A_n \in \mathcal{T}$ et alors

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap \Omega' \text{ avec } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}.$$

Ainsi

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \in \mathcal{T}'.$$

Exercice 2 : [énoncé]
$\Omega = f^{-1}(\Omega')$ avec $\Omega' \in \mathcal{T}'$ donc

$$\Omega \in \mathcal{T}.$$

Soit $A \in \mathcal{T}$. Il existe $A' \in \mathcal{T}'$ tel que $A = f^{-1}(A')$. On a alors

$$\overline{A} = f^{-1}\left(\overline{A'}\right) \text{ avec } \overline{A'} \in \mathcal{T}'$$

donc

$$\overline{A} \in \mathcal{T}'.$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}'^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = f^{-1}(A'_n).$$

Or

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n\right) \text{ avec } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n \in \mathcal{T}'$$

donc

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}.$$

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Ω appartient à toutes les tribus $\mathcal{T}_i$ donc aussi à $\mathcal{T}$.
Soit $A \in \mathcal{T}$. La partie A appartient à toutes les tribus $\mathcal{T}_i$ donc $\overline{A}$ aussi et par conséquent $\overline{A} \in \mathcal{T}$.
Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $i \in I$, $(A_n) \in (\mathcal{T}_i)^{\mathbb{N}}$ donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i$ puis $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.
Finalement, $\mathcal{T}$ s'avère bien un tribu.

(b) Par ce qui précède, on peut déjà affirmer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
Pour toute partie A éléments de $\mathcal{S}$, on a $A \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$ et donc $A \in \mathcal{T}$.
Ainsi, $\mathcal{T}$ est une tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$.
Enfin, si $\mathcal{T}'$ est une autre tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$, celle-ci figure dans la famille $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ et donc

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}'.$$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n\geq p} A_n$ est un évènement car intersection dénombrable d'évènements. On en déduit que A est un évènement par union dénombrable d'évènements.
L'évènement A sera réalisé si, et seulement si, $\bigcap_{n\geq p} A_n$ est réalisé pour un certain p. Cela signifie que les évènements de la suite (A_n) sont réalisés à partir d'un certain rang (ou encore que seul un nombre fini de A_n ne sont pas réalisés).

(b) A' est un évènement par des arguments analogues aux précédents.
La non réalisation de A' signifie la réalisation de

$$\overline{A'} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} \overline{A_n}$$

ce qui revient à signifier que seul un nombre fini de A_n sont réalisés.
Par négation, la réalisation de A' signifie qu'une infinité de A_n sont réalisés.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Considérons l'application $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{N}$ qui envoie ω sur l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$.
Pour chaque $T \subset \mathbb{N}$, on a $\varphi^{-1}(T) = \bigcup_{n\in T} A_n$ et donc $\mathcal{A}$ se comprend comme l'image réciproque de la tribu $\wp(\mathbb{N})$ par l'application φ. C'est donc bien une tribu.

(b) Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur l'ensemble dénombrable Ω. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Ω en affirmant que deux éléments ω et ω' sont en relation si, et seulement si,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \omega \in A \iff \omega' \in A.$$

Les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ constituent une partition de Ω et puisque l'ensemble Ω est dénombrable, ces classes d'équivalence sont au plus dénombrables.
Par construction

$$\forall A \in \mathcal{A}, \omega \in A \implies Cl(\omega) \subset A.$$

Aussi, si $\omega' \notin Cl(\omega)$ alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$(\omega \in A \text{ et } \omega' \notin A) \text{ ou } (\omega \notin A \text{ et } \omega' \in A).$$

Quitte à considérer $\overline{A}$, on peut supposer $\omega \in A$ et $\omega' \notin A$ et l'on note $A_{\omega'}$ cet ensemble.
On a alors

$$Cl(\omega) = \bigcap_{\omega' \notin Cl(\omega)} A_{\omega'} \in \mathcal{A}.$$

En effet :
— l'intersection est élément de $\mathcal{A}$ car il s'agit d'une intersection au plus dénombrable ;
— la classe est incluse dans l'intersection car ω est élément de cette intersection ;
— si un élément ω' n'est par dans la classe, il n'est pas non plus dans l'ensemble $A_{\omega'}$ figurant dans l'intersection.
De plus, les éléments A de la tribu $\mathcal{A}$ se décrivent sous la forme

$$A = \bigcup_{\omega \in A} Cl(\omega).$$

S'il n'y a qu'un nombre fini de classe d'équivalence, la tribu $\mathcal{A}$ est de cardinal fini ce que les hypothèses excluent. Les classes d'équivalences sont donc en nombre dénombrables, on peut les décrire par une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du sujet et les éléments de la tribu $\mathcal{A}$ apparaissent comme ceux de la forme

$$\bigcup_{n \in T} A_n \text{ avec } T \in \wp(\mathbb{N}).$$

(c) L'ensemble $\wp(\mathbb{N})$ n'étant pas dénombrable, ce qui précède assure l'inexistence de tribus dénombrables.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) $\overline{\Omega} = \emptyset$ donc $\overline{\Omega}$ est dénombrable et $\Omega \in \mathcal{T}$.
$\mathcal{T}$ est évidemment stable par passage au complémentaire.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.
Cas 1 : Tous les A_n sont dénombrables
La réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable de parties dénombrables.
Cas 2 : L'un des A_n n'est pas dénombrable.
Posons A_{n_0} ce vilain canard. On a nécessairement $\overline{A_{n_0}}$ dénombrable.
Or

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$$

donc $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ est dénombrable car inclus dans une partie qui l'est.
Dans les deux cas, l'union des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de $\mathcal{T}$.

(b) $\mathcal{T}$ est une tribu contenant tous les $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.
Soit $\mathcal{A}$ une tribu contenant tous les $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.
Les parties dénombrables de Ω peuvent se percevoir comme réunion dénombrable de leurs éléments et sont donc éléments de la tribu A.
Les partie dont le complémentaire est dénombrables sont alors aussi éléments de la tribu A.
On en déduit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$.

(c) Si Ω est dénombrable alors toute partie de Ω peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties $\{\omega\}$ et est donc élément de $\mathcal{T}$. On en déduit $\wp(\Omega) = \mathcal{T}$.

Exercice 7 : [énoncé]
On a $\Omega = f^{-1}(f(\Omega))$ donc $\Omega \in \mathcal{T}$.
Soit $A \in \mathcal{T}$. Vérifions $\overline{A} \in \mathcal{T}$ *i.e.* $\overline{A} = f^{-1}\big(f(\overline{A})\big)$.
L'inclusion directe est toujours vraie. Inversement, soit $x \in f^{-1}\big(f(\overline{A})\big)$. Il existe $y \in \overline{A}$ tel que $f(x) = f(y)$. Si par l'absurde $x \in A$ alors $y \in f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Ceci étant exclu, $x \in \overline{A}$ et donc $f^{-1}\big(f(\overline{A})\big) \subset \overline{A}$ puis égal.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.
On a

$$f\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f(A_n)$$

puis

$$f^{-1}\left(f\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-1}(f(A_n)) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

On peut donc conclure

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}.$$

Exercice 8 : [énoncé]
On a $\mathrm{P}(\mathbb{N}) = 1$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$. Par σ-additivité d'une probabilité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\{n\}) = 1.$$

Puisque cette série converge, son terme général tend vers 0.
Par considération de reste de série convergente, on a aussi

$$\mathrm{P}(\{k\} \,|\, k \geq n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 9 : [énoncé]
Analyse : Si P est solution alors $\mathrm{P}(\mathbb{N}) = 1$ et donc $\lambda a_0 = 1$. On en déduit $\lambda = 1/a_0$.
De plus,

$$\mathrm{P}(\{n\}) = \mathrm{P}(\{n, n+1, \dots\}) - \mathrm{P}(\{n+1, n+2, \dots\}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$$

ce qui détermine P.
Synthèse : Posons

$$p_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}.$$

Les p_n sont des réels positifs car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{a_0}\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - a_{n+1}) = 1$$

car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle. Il existe donc une probabilité P sur $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\mathrm{P}(\{n\}) = p_n$$

et alors, par continuité croissante

$$\mathrm{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = \frac{a_n}{a_0}.$$

Exercice 10 : [énoncé]

(a) On vérifie par les éléments l'inclusion

$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$$

et donc

$$\mathrm{P}(A\Delta C) \leq \mathrm{P}(A\Delta B) + \mathrm{P}(B\Delta C).$$

(b) On a

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A\Delta\emptyset) \leq \mathrm{P}(A\Delta B) + \mathrm{P}(B\Delta\emptyset) = \mathrm{P}(A\Delta B) + \mathrm{P}(B)$$

donc

$$\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(A\Delta B).$$

Un raisonnement symétrique fournit aussi

$$\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(A\Delta B).$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $a_1 = 0$ et $a_2 = p^2$ et $a_3 = (1-p)p^2$.

(b) Considérons les résultats des deux premiers lancers :

$$PP, PF, FP \text{ et } FF$$

et le système complet d'événements

$$PP, PF \text{ et } F = FP \cup FF.$$

Par translation du problème

$$\mathrm{P}(A_{n+2} \,|\, PF) = \mathrm{P}(A_n) \text{ et } \mathrm{P}(A_{n+2} \,|\, F) = \mathrm{P}(A_{n+1})$$

et

$$\mathrm{P}(A_{n+2} \,|\, PP) = 0.$$

Par la formule des probabilités totales

$$a_{n+2} = 0 \times p^2 + a_n \times p(1-p) + a_{n+1}(1-p)$$

soit encore

$$a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.$$

(c) Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. En sommant les relations précédentes, on obtient

$$S - (a_1 + a_2) = (1-p)(S - a_1) + p(1-p)S.$$

On en tire $S = 1$ et donc il est quasi-certain que deux piles consécutifs apparaissent.

(d) Il s'agit de calculer (sous réserve de convergence)

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$

On exploite la relation

$$(n+2)a_{n+2} = (1-p)(n+2)a_{n+1} + p(1-p)(n+2)a_n$$

et on somme

$$\mu - 2a_2 - a_1 = (1-p)\big((\mu - a_1) + (S - a_1)\big) + p(1-p)(\mu + 2S).$$

On en tire

$$\mu = \frac{1+p}{p^2}.$$

Il ne reste plus qu'à établir la convergence de la série définissant μ. Puisque (a_n) est une suite récurrente linéaire double, son terme général est combinaison linéaire de suite géométrique de limite nulle car $a_n \to 0$. La série des $n a_n$ est alors convergente par argument de croissance comparée.

Exercice 12 : [énoncé]

Notons A_n l'événement de probabilité p_n :

« la famille a n enfants ».

Les événements A_n constituent un système complet.
On veut ici calculer la probabilité de l'événement B : « la famille a au moins 1 fille » On peut plus facilement calculer la probabilité de l'événement contraire $C = \overline{B}$: « la famille n'a que des garçons » Par la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(C)\mathrm{P}(A_n).$$

Or $P_{A_n}(C)$ est la probabilité qu'une famille à n enfants n'a que des garçons et donc

$$P_{A_n}(C) = \frac{1}{2^n}.$$

On obtient alors

$$\mathrm{P}(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda/2}.$$

On conclut

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda/2} \simeq 0,632.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Notons S_n l'événement « L'expérience au rang n est un succès ». On sait

$$\mathrm{P}(S_n) = \mathrm{P}(\overline{S_n}) = \frac{1}{2}.$$

On peut exprimer simplement[1] B_2, B_3 et B_4 en fonctions des événements S_n :

$$B_2 = S_1 \cap S_2,\quad B_3 = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3 \quad \text{et} \quad B_4 = \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4.$$

Par indépendance des résultats des différentes expériences

$$p_2 = \frac{1}{4},\quad p_3 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{1}{8}.$$

(b) L'événement A_n est la réunion des B_k pour k allant de 2 à n et ces derniers sont deux à deux incompatibles. Par additivité, on a donc

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{car} \quad p_1 = 0.$$

Étudions ensuite $\mathrm{P}(B_{n+3})$.

On exprime B_{n+3} comme intersection d'événements indépendants.

L'événement B_{n+3} signifie que deux succès consécutifs sont rencontrés aux rangs $n+2$ et $n+3$ et que cette situation n'a pas été rencontrée précédemment :

$$B_{n+3} = S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_{n+2}}.$$

Cependant, si l'expérience a réussi au rang $n+2$ mais qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant ce rang, c'est qu'elle a échoué au rang $n+1$. Ainsi, $S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} \subset \overline{S_{n+1}}$ et donc

$$S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}}.$$

1. L'expression de B_5 est plus complexe : $B_5 = \overline{S_3} \cap S_4 \cap S_5 \cap \overline{S_1 \cap S_2}$.

Aussi, sachant que l'expérience a échoué au rang $n+1$, affirmer qu'il n'y a pas eu deux succès consécutifs avant le rang $n+2$ revient à signifier qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant le rang n :

$$\overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_n}.$$

Ainsi, on a l'égalité

$$B_{n+3} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_n}.$$

Enfin, les différentes expériences étant indépendantes et l'événement A_n n'étant que fonctions des événements $S_1, \dots, S_n$, les événements de l'intersection précédentes sont indépendants ce qui donne

$$p_{n+3} = \mathrm{P}(B_{n+3}) = \mathrm{P}(\overline{S_{n+1}})\mathrm{P}(S_{n+2})\mathrm{P}(S_{n+3})\mathrm{P}(\overline{A_n}) = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

(c) L'égalité précédente démontrée pour $n \geq 2$ est aussi vraie pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, on peut alors écrire à la fois

$$p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) \quad \text{et} \quad p_{n+2} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right).$$

Par différence, on obtient $p_{n+3} - p_{n+2} = -\frac{1}{8}p_n$ et cette égalité est encore vraie pour $n = 1$.

(d) $(p_n)_{n\geq 1}$ *est une suite récurrente linéaire d'ordre* 3 *: l'expression de son terme général se déduit du calcul des puissances d'une matrice traduisant la relation de récurrence.*

Pour $n \geq 1$, introduisons X_n la colonne de coefficients p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. On a

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on obtient $X_n = A^{n-1}X_1$ pour tout $n \geq 1$. Afin de calculer la puissance de A, on étudie la réduction de cette matrice. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = X^3 - X^2 + \frac{1}{8} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)$$

de racines distinctes :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Pour λ valeur propre de A, l'espace propre associé est engendré par la colonne ${}^t\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$ et on peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} \beta\gamma(\gamma-\beta) & -(\beta+\gamma)(\gamma-\beta) & \gamma-\beta \\ -\alpha\gamma(\gamma-\alpha) & (\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha) & \gamma-\alpha \\ \beta\alpha(\beta-\alpha) & -(\beta+\alpha)(\beta-\alpha) & \beta-\alpha \end{pmatrix}$$

soit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \end{pmatrix}.$$

Enfin, l'égalité $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$ permet de conclure :

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Notons A_n l'évènement

« les n premieres boules tirées sont rouges ».

On a $\mathrm{P}(A_0) = 1$ et

$$\mathrm{P}(A_n \,|\, A_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n}$$

car si A_{n-1} a lieu, l'urne est composée d'une boule blanche et de $2n-1$ boules rouges lors du n-ième tirage.
Par probabilités composées

$$\mathrm{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(b) En vertu de la formule de Stirling

$$\mathrm{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0.$$

(c) Dans ce nouveau modèle

$$\mathrm{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-2}{3k-1}$$

et donc

$$\ln \mathrm{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{3k-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

car $\sum \ln(1 - 1/(3k-1))$ est une série à termes négatifs divergente. À nouveau l'on obtient

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Notons Lu, Ma, Me, Je, Ve les évènements correspondant à la perte des notes de cours les jours correspondants. On a

$$\mathrm{P}(Lu) = p, \mathrm{P}(Ma \,|\, \overline{Lu}) = p, \mathrm{P}(Me \,|\, \overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = p, \dots$$

et donc

$$\mathrm{P}(Ma \cap \overline{Lu}) = \mathrm{P}(Ma \,|\, \overline{Lu})\mathrm{P}(\overline{Lu}) = p(1-p).$$

Puisque $Lu \cup Ma$ est la réunion disjointes de Lu et $Ma \cap \overline{Lu}$, on a

$$\mathrm{P}(Lu \cup Ma) = p + p(1-p).$$

Aussi

$$\mathrm{P}(Me \cap \overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = \mathrm{P}(Me \,|\, \overline{Lu} \cap \overline{Ma})\mathrm{P}(\overline{Lu} \cap \overline{Ma})$$

avec

$$\mathrm{P}(\overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = 1 - \mathrm{P}(Lu \cup Ma) = 1 - p - p(1-p) = (1-p)^2$$

puis

$$\mathrm{P}(Me \cap \overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = p(1-p)^2 \text{ et } \mathrm{P}(Lu \cup Ma \cup Me) = p + p(1-p) + p(1-p)^2.$$

Etc
Finalement

$$\mathrm{P}(Lu \cup \ldots \cup Ve) = p + p(1-p) + \cdots + p(1-p)^4 = 1 - (1-p)^5$$

et

$$\mathrm{P}(Lu \,|\, Lu \cup \ldots \cup Ve) = \frac{p}{1-(1-p)^5}.$$

(b) On a aussi

$$\mathrm{P}(Ma \,|\, Lu \cup \ldots \cup Ve) = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^5},$$
$$\mathrm{P}(Me \,|\, Lu \cup \ldots \cup Ve) = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^5}, \ldots$$

Le jour le plus probable où la perte eu lieu est le premier jour de la semaine.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Notons A_i l'évènement

« le sachet est produit dans l'entreprise d'indice i ».

Notons B_1 l'évènement

« la première langue de belle-mère choisie dans le sachet est fonctionnelle »

Puisque les entreprises produisent en proportion égale

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = 1/2$$

et par la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(\overline{B_1}) = \mathrm{P}(\overline{B_1} \,|\, A_1)\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(\overline{B_1} \,|\, A_2)\mathrm{P}(A_2) = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

puis

$$\mathrm{P}(B_1) = \frac{(1-p_1) + (1-p_2)}{2}.$$

Notons B_2 l'évènement « la deuxième langue de belle-mère choisie dans le sachet est fonctionnelle » On veut calculer

$$\mathrm{P}(B_2 \,|\, B_1) = \frac{\mathrm{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathrm{P}(B_1)}.$$

Par la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(B_1 \cap B_2) = \mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \,|\, A_1)\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \,|\, A_2)\mathrm{P}(A_2).$$

On peut supposer l'indépendance des défectuosités à l'intérieur d'une même usine et l'on obtient

$$\mathrm{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{(1-p_1)^2 + (1-p_2)^2}{2}.$$

On en déduit

$$\mathrm{P}(B_2 \,|\, B_1) = \frac{(1-p_1)^2 + (1-p_2)^2}{(1-p_1) + (1-p_2)}.$$

(b) Pour $0 \le k \le n$, notons C_k l'évènement

« le sachet contient k articles fonctionnels ».

On veut mesurer

$$\mathrm{P}(C_k \,|\, B_1) = \frac{\mathrm{P}(C_k \cap B_1)}{\mathrm{P}(B_1)}.$$

Pour $k = 0$, cette probabilité est nulle car $C_0 \cap B_1 = \emptyset$.
Pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$

$$C_k \cap B_1 = B_1 \cap D_{k-1}$$

avec D_{k-1} l'évènement

« en dehors du premier article, le sachet contient $k-1$ articles fonctionnels ».

On peut mesurer la probabilité de ces évènements dès que l'on connaît l'usine de production

$$\mathrm{P}(B_1 \cap D_{k-1} \,|\, A_i) = (1-p_i)\binom{n-1}{k-1}(1-p_i)^{k-1}p_i^{n-k}.$$

Par probabilités totales

$$\mathrm{P}(B_1 \cap D_{k-1}) = \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\left((1-p_1)^k p_1^{n-k} + (1-p_2)^k p_2^{n-k}\right)$$

et enfin

$$\mathrm{P}(C_k \,|\, B_1) = \frac{\binom{n-1}{k-1}\left((1-p_1)^k p_1^{n-k} + (1-p_2)^k p_2^{n-k}\right)}{(1-p_1) + (1-p_2)}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a) La somme des p_n pour $n \in \mathbb{N}$ doit valoir 1. On en déduit $a = \mathrm{e}^{-2}$.

(b) Par événement contraire, il suffit de calculer la probabilité que la famille soit uniquement constituée de filles. On introduit les événements

$$A_n = \text{« La famille comporte } n \text{ enfants »}$$
$$B = \text{« La famille ne comporte que des filles ».}$$

La famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(B \,|\, A_n)\mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}p_n = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

On en déduit la probabilité demandée

$$P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(c) Introduisons l'événement

$$G_1 = \text{« La famille comporte un garçon ».}$$

On connait

$$\mathrm{P}(G_1 \,|\, A_2) = \frac{1}{2}$$

et

$$\mathrm{P}(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(G_1 \,|\, A_n)\mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}p_n = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Par la formule de Bayes

$$\mathrm{P}(A_2 \,|\, G_1) = \frac{\mathrm{P}(G_1 \,|\, A_2)\mathrm{P}(A_2)}{\mathrm{P}(G_1)} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Un calcul facile fournit

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \implies \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B}).$$

Il est alors immédiat de vérifier que

$$A_1, \dots, A_n \text{ mutuellement indépendants} \implies A_1, \dots, \overline{A_i}, \dots, A_n \text{ mutuellement indép}$$

En enchaînant les négations, on obtiendra

$$A_1, \dots, A_n \text{ mutuellement indépendants} \implies \widetilde{A_1}, \dots, \widetilde{A_n}.$$

(b) C'est immédiat puisque l'indépendance mutuelle d'une famille infinie se ramène à celle des sous-familles finies.

Exercice 19 : [énoncé]
On étudie
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=\lim_{N\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right).$$
Par indépendances des $\overline{A_n}$, on a
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right)=\prod_{n=0}^{N}\bigl(1-\mathrm{P}(A_n)\bigr).$$
Or $1-x\leq \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}\right)\leq\prod_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{P}(A_n)}=\exp\left(-\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(A_n)\right).$$
À la limite quand $N\to+\infty$
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)\leq\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(A_n)\right)$$
où l'on comprend l'exponentielle nulle si la série des $\mathrm{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On a
$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}.$$
Par continuité décroissante
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{A_k}\right).$$
Enfin, par mutuelle indépendance
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{A_k}\right)=\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}\bigl(\overline{A_k}\bigr).$$
La relation demandée est dès lors immédiate.

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons (i). On a
$$\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}\bigl(\overline{A_k}\bigr)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
et donc
$$\sum_{k=0}^{n}\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_k})\bigr)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\mathrm{P}\bigl(\overline{A_k}\bigr)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty.$$
Ainsi, la série $\sum\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)$ est divergente.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Inversement, si la série $\sum\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)$ diverge, puisque les termes sommés sont positifs, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On peut alors suivre la démonstration précédente à rebours et conclure (i).
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons (ii).
Si $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum\mathrm{P}(A_n)$ diverge grossièrement.
Si en revanche $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors
$$\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)=\ln\bigl(1-\mathrm{P}(A_n)\bigr)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\mathrm{P}(A_n)$$
et à nouveau la série $\sum\mathrm{P}(A_n)$ diverge, cette fois-ci par équivalence de séries à termes de signe constant.
(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons (iii).
Il suffit de reprendre le raisonnement précédent en constatant
$$\ln\bigl(\mathrm{P}(\overline{A_n})\bigr)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\iff\mathrm{P}(A_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) La famille définit une loi de probabilité si elle est formée de réels positifs, qu'elle est sommable et de somme égale à 1. Ceci a lieu si, et seulement si, $\lambda=1/\zeta(s)$.

(b) Soit $m\in\mathbb{N}^*$ et $p_1,\dots,p_m$ des nombres premiers deux à deux distincts.
$$A_{p_1}\cap\ldots\cap A_{p_m}=\bigl\{n\in\mathbb{N}^*\bigm|\forall k\in[\![1\,;m]\!],\ p_k\mid n\bigr\}.$$
Les p_k étant des nombres premiers deux à deux distincts, on a la propriété arithmétique
$$\bigl(\forall k\in[\![1\,;m]\!],\ p_k\mid n\bigr)\iff p_1\ldots p_m\mid n$$
et donc
$$A_{p_1}\cap\ldots\cap A_{p_m}=A_{p_1\ldots p_m}.$$

Il reste à calculer les probabilités des événements A_p.

$$\mathrm{P}(A_p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(pk)^s} = \frac{\lambda}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{p^s}.$$

L'égalité $(p_1 \dots p_m)^s = p_1^s \dots p_m^s$ donne alors immédiatement

$$\mathrm{P}(A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_m}) = \mathrm{P}(A_{p_1 \ldots p_m}) = \frac{1}{(p_1 \ldots p_m)^s} = \mathrm{P}(A_{p_1}) \times \cdots \times \mathrm{P}(A_{p_m}).$$

On peut conclure que les événements A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.

(c) On a

$$\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$$

car tout entier naturel supérieur à 2 est divisible par un nombre premier. Énumérons les nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. On peut écrire par continuité décroissante et indépendance

$$\mathrm{P}\big(\{1\}\big) = \lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_{p_k}}\right) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{P}(\overline{A_{p_k}}) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Or $\mathrm{P}(\{1\}) = \lambda$ et donc

$$\lambda = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Après passage à l'inverse, ceci fournit la relation demandée sous réserve de comprendre

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

(d) Par l'absurde, supposons la famille $(1/p)_{p \in \mathcal{P}}$ sommable. On a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right)\right) = -\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Or

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$$

est terme général d'une série convergente et on peut donc introduire

$$M = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right).$$

Aussi, pour tout $s > 1$,

$$\prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}}\right) \le \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right)$$

et donc, lorsque N tend vers l'infini,

$$\zeta(s) \le M.$$

Ceci est absurde car ζ est de limite $+\infty$ quand s tend vers 1.