Théorie des ensembles et des applications

Logique

Exercice 1 [01481] [Correction]
Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

(a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
(b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
(c) $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
(d) $x \geq 0 \implies x \geq 2$.

Exercice 2 [01482] [Correction]
Étant donné P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité :

(a) P ou $(Q$ et $R) \sim (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$
(b) $\text{non}(P \implies Q) \sim P$ et $\text{non}(Q)$.

Exercice 3 [01483] [Correction]
On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Exercice 4 [01484] [Correction]
On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une.
Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

Usage des quantificateurs

Exercice 5 [01485] [Correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

(a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$
(b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$
(c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
(d) $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
(e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$.

Exercice 6 [01486] [Correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(a) la fonction f s'annule
(b) la fonction f est la fonction nulle
(c) f n'est pas une fonction constante
(d) f ne prend jamais deux fois la même valeur
(e) la fonction f présente un minimum
(f) f prend des valeurs arbitrairement grandes
(g) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 7 [01487] [Correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.
Exprimer les négations des assertions suivantes :

(a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
(b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
(c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \left|f(x)\right| \leq M$
(d) $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
(e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$
(f) $\forall x \in I, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.

Exercice 8 [01489] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On considère les assertions suivantes :

$$P \sim \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ »}, Q \sim \text{« } \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ »}$$

et

$$R \sim \text{« } \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0\big) \text{ ».}$$

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

(a) $P \implies Q$
(b) $Q \implies P$
(c) $Q \implies R$
(d) $\text{non}(R) \implies Q$
(e) $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$
(f) $\text{non}(P) \implies \text{non}(R)$?

Exercice 9 [01490] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$.
(a) Montrer que $(\forall \varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$.
(b) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$.

Raisonnements

Exercice 10 [03947] [Correction]
Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice 11 [03946] [Correction]
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

Exercice 12 [02054] [Correction]
Soit $\mathcal{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Écrire une démonstration de l'identité $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 13 [03945] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon \implies a = 0.$$

Raisonnements par récurrence

Exercice 14 [02057] [Correction]
Soit (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = 2, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1.$$

Exercice 15 [02058] [Correction]
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 16 [02059] [Correction]
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1!3!\ldots(2n+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1}.$$

Exercice 17 [02060] [Correction]
Le raisonnement suivant est erroné :
Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :
$\mathcal{P}(n) = n$ points deux à deux distincts quelconques du plan sont toujours alignés.
Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est vraie.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.
Considérons alors $n+1$ points deux à deux distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
(HR) Les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$.
(HR) Les points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}'$.
Or $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent les deux points distincts A_2 et A_n, donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
Par suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur la droite $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
Récurrence établie.
Où est l'erreur ?

Sous-ensemble, appartenance, inclusion

Exercice 18 [01491] [Correction]
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

(a) $a \in E$
(b) $a \subset E$
(c) $\{a\} \subset E$
(d) $\emptyset \in E$
(e) $\emptyset \subset E$
(f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 19 [01492] [Correction]
Un ensemble est dit décrit en compréhension lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit décrit en extension lorsqu'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(a) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

(b) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \dots\}$.

(c) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.

(d) Décrire en compréhension l'ensemble $]0\,;1]$.

(e) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(f) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 20 [01493] [Correction]
Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Opérations sur les parties d'un ensemble

Exercice 21 [01495] [Correction]
Étant donné A et B deux parties de E, justifier

$$\complement_E A \setminus \complement_E B = B \setminus A.$$

Exercice 22 [01496] [Correction]
Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

(a) $A \subset B \iff A \cup B = B$.

(b) $A = B \iff A \cap B = A \cup B$.

(c) $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$

(d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$

Exercice 23 [01497] [Correction]
Soient A et B deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B, l'ensemble

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Montrer

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Exercice 24 [01498] [Correction]
Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer que :

(a) $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$

(b) $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$

(c) $A \Delta B = A \cap B \implies A = B = \emptyset$.

Exercice 25 [01500] [Correction]
Soient A, B deux parties de E.
Discuter et résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Fonctions indicatrices

Exercice 26 [02200] [Correction]
Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de la partie A dans E, l'application $1_A : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions caractéristiques ?

(a) $\min(1_A, 1_B)$

(b) $\max(1_A, 1_B)$

(c) $1_A.1_B$

(d) $1 - 1_A$

(e) $1_A + 1_B - 1_A.1_B$

(f) $(1_A - 1_B)^2$

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 27 [01501] [Correction]
Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

(a) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.

(b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
Étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 28 [01503] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 29 [01505] [Correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon G \to E$
Établir que si $h \circ g \circ f$ est injective et que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 30 [01507] [Correction]
Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives

Exercice 31 [01508] [Correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f_1, f_2\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$.
On suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 32 [01509] [Correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f\colon E \to F$ et $g_1, g_2\colon F \to G$.
On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Image directe, image réciproque d'une partie

Exercice 33 [01512] [Correction]
Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.
Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[-1\,;4]$ par la fonction $f\colon x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34 [01514] [Correction]
Soit $f\colon E \to F$ une application.
Établir

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Exercice 35 [01515] [Correction]
Soient E et F deux ensembles et $f\colon E \to F$.
Montrer que f est injective si, et seulement si,

$$\forall A, A' \in \wp(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

Exercice 36 [01516] [Correction]
Soit $f\colon E \to F$ une application. Montrer que :

(a) f est injective $\iff \forall A \in \wp(E), A = f^{-1}(f(A))$.

(b) f est surjective $\iff \forall B \in \wp(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 37 [01510] [Correction]
Soit $f\colon E \to I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$.
Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $[0\,;1[$

(b) $]3\,;4[\cup]4\,;5[$

(c) $\{4\}$

(d) $]-\infty\,;0[\cup[2\,;+\infty[$ (et il n'y a pas d'erreurs!)

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Dans les deux cas on obtient la table

P	v	v	v	v	f	f	f	f
Q	v	v	f	f	v	v	f	f
R	v	f	v	f	v	f	v	f
	v	v	v	v	v	f	f	f

(b) Dans les deux cas on obtient la table

P	v	v	f	f
Q	v	f	v	f
	f	v	f	f

Exercice 3 : [énoncé]
On compare deux paquets de trois billes.
Si l'un est plus lourd que l'autre, c'est qu'il contient l'intrus.
Sinon, l'intrus est parmi les trois billes restantes.
Ainsi, on sait dans quel paquet de trois billes se situe l'intrus.
Dans ce celui-ci, on compare deux billes.
Si l'une est plus lourde que l'autre, c'est l'intrus.
Sinon, l'intrus est la troisième.

Exercice 4 : [énoncé]
L'exercice serait facile à résoudre en deux pesées si l'on savait si la bille différente était plus lourde ou plus légère que les autres. Ignorant ce fait, l'exercice devient d'autant plus croustillant...
Notons 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nos billes.
On commence par comparer 2 lots constituées de 1,2,3 et de 4,5,6.
Si ceux-ci ont même masse alors l'intrus figure parmi 7,8,9 et l'on peut utiliser la bille 1 comme bille témoin. On compare alors les billes 1 et 7 puis les billes 1 et 8 pour démasquer l'intrus.
Si en revanche les deux premiers lots n'ont pas même masse, l'intrus se trouve parmi l'un deux. La bille 9 servira alors de bille témoin. Pour fixer les idées (et sans perte de généralités), supposons que le premier lot est plus lourd que le second. Comparons maintenant les billes 1 et 4 avec les billes 2 et 5.
Si celles-ci ont même masse commune, l'intrus se trouve dans les deux autres billes 3 et 6. Une comparaison de 3 avec 9 permet alors de savoir qui est l'intrus de 3 ou de 6.
Si celles-ci n'ont pas même masse commune, pour fixer les idées (et sans perte de généralités), supposons que 1 et 4 soient plus lourdes que 2 et 5.
Si l'intrus est plus lourd que ses congénères alors cela ne peut ni être 4 ni être 2 à cause respectivement des première et deuxième pesées.
Si l'intrus est plus léger que ses congénères alors cela ne peut ni être 2 ni être 4 à cause respectivement des première et deuxième pesées.
Dans tous les cas l'intrus est soit 1, soit 5.
Une comparaison de la bille 1 avec la bille 9 permet alors de démasquer cet intrus.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) la fonction f est constante

(b) la fonction f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais n'y est pas forcée de s'y annuler)

(c) la fonction f prend toute valeur réelle

(d) la fonction f est croissante

(e) la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur

Exercice 6 : [énoncé]

(a) $\exists x\in I, f(x)=0$

(b) $\forall x\in I, f(x)=0$

(c) $\exists x,y\in I, f(x)\neq f(y)$

(d) $\forall x,y\in I, x\neq y \implies f(x)\neq f(y)$ ou encore
$\forall x,y\in I, f(x)=f(y)\implies x=y$

(e) $\exists a\in I,\forall x\in I, f(x)\geq f(a)$

(f) $\forall M\in\mathbb{R},\exists x\in I, f(x)>M$

(g) $\forall x,y\in I, f(x)=0$ et $f(y)=0 \implies x=y$.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) $\exists x \in I, f(x) = 0$

(b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \neq y$

(c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, \left|f(x)\right| > M$

(d) $\exists x, y \in I, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$

(e) $\exists x, y \in I, f(x) = f(y)$ et $x \neq y$

(f) $\exists x \in I, f(x) > 0$ et $x > 0$.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) d) e) sont les assertions exactes (d) car f est continue...

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Supposons $\forall \varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 0$, on a $|a| \leq 0$ donc $a = 0$.

(b) Par contraposée, montrons : $a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon$.
Supposons $a \neq 0$. Pour $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ on a $\varepsilon > 0$ et $|a| > \varepsilon$ ce qui détermine un ε convenable.

Exercice 10 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{Q}$. Si par l'absurde $y = x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors

$$\sqrt{2} = y - x \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 11 : [énoncé]
Par disjonction de cas :
Cas n pair : on peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors

$$\frac{n(n^2+1)}{2} = p(n^2+1) \in \mathbb{N}.$$

Cas n impair : on peut écrire $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors

$$\frac{n(n^2+1)}{2} = n\big(2p^2+2p+1\big) \in \mathbb{N}.$$

Dans les deux cas la propriété est vraie.

Exercice 12 : [énoncé]
Par l'absurde. Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$, considérons $x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$.
Comme $x \in \mathcal{P}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$.
Comme $x \in \mathcal{I}$, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2\ell + 1$.
Par suite $2k = 2\ell + 1$ puis $1/2 = k - \ell \in \mathbb{Z}$ ce qui est absurde
Une erreur de raisonnement classique est de décrire x comme un nombre pair et impair en choisissant le même entier k.

Exercice 13 : [énoncé]
Par contraposée. Supposons $a \neq 0$. On a alors $|a| > 0$ et pour $\varepsilon = |a|/2$, on observe $|a| > \varepsilon$.
Ainsi

$$a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon.$$

Exercice 14 : [énoncé]
Par récurrence double.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n+1$ (avec $n \geq 0$).

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \underset{HR}{=} 3.2^{n+1} + 3 - 2.2^n - 2 = 2^{n+2} + 1.$$

Récurrence établie

Exercice 15 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geq 2$.
Pour $n = 2$ ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.

$$1 + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{HR}{\geq} \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{?}{\geq} \frac{3(n+1)}{2n+3}.$$

Vérifions l'inégalité proposée :

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2n+3} = \frac{n^2+2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \geq 0.$$

Récurrence établie.

Exercice 16 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$1!3!\cdots(2n+1)!(2n+3)! \underset{HR}{\geq} ((n+1)!)^{n+1}(2n+3)! \underset{?}{\geq} ((n+2)!)^{n+2}.$$

Vérifions l'inégalité proposée :

$$\frac{((n+1)!)^{n+1}(2n+3)!}{((n+2)!^{n+2}} = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)^{n+2}} = \frac{(n+2)(n+3)\dots(2n+3)}{(n+2)(n+2)\dots(n+2)} \geq 1.$$

Récurrence établie.

Exercice 17 : [énoncé]
À l'avant dernière ligne, pour que A_2 et A_n soient distincts, il est nécessaire que $n \geq 3$.
L'hérédité de la récurrence ne s'enchaîne alors plus avec l'initialisation.

Exercice 18 : [énoncé]
On peut écrire : a), c), e).

Exercice 19 : [énoncé]

(a) $\{1, 3, 5, 7, \dots\} = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1\right\} = \left\{2k+1 \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$.

(b) $\{1, 10, 100, 1000, \dots\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{N}, x = 10^k\right\} = \left\{10^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$.

(c) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.

(d) $]0\,;1] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < x \leq 1\right\}$.

(e) $\left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\right\} = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

(f) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) = y\right\}$.

Exercice 20 : [énoncé]
$\mathcal{P}\big(\{a\}\big) = \{\emptyset, \{a\}\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\Big\}$.

Exercice 21 : [énoncé]
Puisque la privation correspond à l'intersection avec le complémentaire

$$\complement_E A \setminus \complement_E B = \complement_E A \cap \complement_E \complement_E B = B \cap \complement_E A = B \setminus A.$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) ($\Longrightarrow$) Supposons $A \subset B$. On a toujours $B \subset A \cup B$.
Pour $x \in A \cup B$. Que $x \in A$ ou $x \in B$ on a $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.
($\Longleftarrow$) Supposons $A \cup B = B$. Puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset B$.

(b) ($\Longrightarrow$) Supposons $A = B$. On a $A \cap B = A = A \cup B$.
($\Longleftarrow$) Supposons $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$ et de même $B \subset A$ donc $A = B$.

(c) ($\Longrightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cap C$.
On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.
($\Longleftarrow$) Supposons $B \subset A \subset C$. $A \cup B = A = A \cap C$.

(d) ($\Longrightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.
Soit $x \in B$.
Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$.
Si $x \notin A$ alors sachant $x \in A \cup B$ on a $x \in A \cup C$, or $x \notin A$ donc $x \in C$.
Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et de manière symétrique $C \subset B$ d'où l'égalité.
($\Longleftarrow$) Si $B = C$ alors clairement $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 23 : [énoncé]
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
x \in A \Delta B &\iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\\
&\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \notin A)\\
&\qquad \text{et } (x \notin B \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin A)\\
&\iff x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\\
&\iff x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

d'où l'égalité des ensembles.

Exercice 24 : [énoncé]

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(a) Si $A\Delta B = A\Delta C$ alors pour tout $x \in B$:
Si $x \in A$ alors $x \notin A\Delta B$ et donc $x \notin A\Delta C$ et puisque $x \in A$, $x \in C$.
Si $x \notin A$ alors $x \in A\Delta B$ et donc $x \in A\Delta C$ et puisque $x \notin A$, $x \in C$.
Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et un raisonnement symétrique donne $C \subset B$ puis l'égalité.
Réciproque immédiate.

(b) $A \setminus B = A \iff A \cap C_E B = A \iff A \subset C_E B$ or $A \subset C_E B \iff B \subset C_E A$ et donc $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.

(c) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ donc
$A\Delta B = A \cap B \implies A \cap B = \emptyset = A \cup B \implies A = B = \emptyset$.

Exercice 25 : [énoncé]
Si $B \not\subset A$ alors l'équation n'a pas de solution.
Si $B \subset A$. Soit X une solution de l'équation.
On a $X = (A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X) = B \cup C$ avec $C = \overline{A} \cap X \subset \overline{A}$.
Inversement, pour $X = B \cup C$ avec $C \subset \overline{A}$, $A \cap X = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B$.
Ainsi $\mathcal{S} = \left\{X = B \cup C \mid C \subset \overline{A}\right\} = \left\{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \overline{A}\right\}$.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) $A \cap B$

(b) $A \cup B$

(c) $A \cap B$

(d) $C_E A$ complémentaire de A dans E.

(e) $A \cup B$

(f) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Exercice 27 : [énoncé]

(a) On a

k	0	1	2	3	...
$f(k)$	0	2	4	6	...

et

k	0	1	2	3	...
$g(k)$	0	0	1	1	...

f est injective car $2k = 2k' \implies k = k'$ mais non surjective car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises.
g est surjective car $2y$ est un antécédent de y mais non injective car un nombre pair et l'impair qui le suit prennent même valeur par g.

(b) D'une part
$$(g \circ f)(k) = k$$
donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
D'autre part
$$(f \circ g)(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair} \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$
$g \circ f$ est bijective. $f \circ g$ n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 28 : [énoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si n est pair alors $f(n) = n/2 \in \mathbb{Z}^+$ et si n est impair alors $f(n) = -(n+1)/2 \in \mathbb{Z}^{-*}$.
Dans les deux cas $f(n) \in \mathbb{Z}$.
Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. Supposons $f(n) = f(n')$.
Compte tenu de la remarque précédente, n et n' ont nécessairement même parité.
Si n et n' sont pairs alors $n/2 = n'/2$ donc $n = n'$.
Si n et n' sont impairs alors $-(n+1)/2 = -(n'+1)/2$ donc $n = n'$.
Ainsi f est injective.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Si $m \geq 0$ alors pour $n = 2m \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Si $m < 0$ alors pour $n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Ainsi f est surjective.
Finalement f est bijective.

Exercice 29 : [énoncé]
Supposons $h \circ g \circ f$ injective et $g \circ f \circ h$ ainsi que $f \circ h \circ g$ surjectives.
Puisque $(h \circ g) \circ f$ est injective, on a f injective.
Puisque $f \circ (h \circ g)$ est surjective, on a f surjective.
Par suite f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
Par composition $h \circ g = (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective et par suite g est injective.
D'autre part $g \circ f \circ h$ est surjective et donc g aussi. Finalement g est bijective.
Par composition $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est injective et $h = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est surjective donc h est bijective.

Exercice 30 : [énoncé]
Par l'exercice précédent, $f \circ g \circ f$ bijective implique f injective et f surjective.
Ainsi f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective par composition d'applications bijectives.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 31 : [énoncé]
$\forall x \in E$ on a $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$ i.e. $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$ donc $f_1(x) = f_2(x)$. Ainsi $f_1 = f_2$.

Exercice 32 : [énoncé]
$\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors $g_1(y) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2(y)$ donc $g_1 = g_2$.

Exercice 33 : [énoncé]
$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et $f^{-1}([-1\,;4]) = [-2\,;2]$.

Exercice 34 : [énoncé]
Soit $x \in A$. On a $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or, puisque $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$ i.e. $y \in B$. Ainsi $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 35 : [énoncé]
Supposons f injective.
Soient $A, A' \in \wp(E)$. On sait déjà $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
Soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Il existe $x \in A$ et $x' \in A'$ tel que $y = f(x) = f(x')$.
Or f est injective donc $x = x' \in A \cap A'$ puis $y \in f(A \cap A')$.
Inversement supposons $\forall A, A' \in \wp(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
Soient $x, x' \in E$. Supposons $f(x) = f(x')$.
Pour $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$ on a $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A') = \big\{f(x)\big\} \neq \emptyset$ donc $A \cap A' \neq \emptyset$ puis $x = x'$.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) ($\Longrightarrow$) Supposons f injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Pour $x \in f^{-1}(f(A))$, on a $f(x) \in f(A)$ donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$.
Puisque f est injective, $x = x'$ et donc $x \in A$. Ainsi $f^{-1}(f(A)) \subset A$ puis l'égalité.
($\Longleftarrow$) Supposons $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$. Soient $x, x' \in A$.
Si $f(x) = f(x')$. Considérons $A = \{x\}$. On a $f(A) = \big\{f(x)\big\}$ donc $x' \in f^{-1}(f(A)) = A$ d'où $x = x'$.
Ainsi f injective.

(b) ($\Longrightarrow$) Supposons f surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.
On sait déjà $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Puisque $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi $B \subset f(f^{-1}(B))$ puis l'égalité.
($\Longleftarrow$) Supposons $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.
Soit $y \in F$. Pour $B = \{y\}$, on a $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ donc $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Par suite f est surjective.

Exercice 37 : [énoncé]
Puisque f est surjective, les A_i sont non vides.
Si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ alors pour $x \in A_i \cap A_j$ on a $f(x) = i$ et $f(x) = j$ donc $i = j$.
Par contraposée : $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
Soient $x \in E$ et $i = f(x)$. On a $x \in A_i$. Ainsi $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ puis l'égalité.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD