

# Dérivation

## Dérivabilité

### Exercice 1 [01354] [Correction]

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$(a) x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3} \qquad (b) x \mapsto (x^2 - 1) \arccos(x^2)$$

### Exercice 2 [00736] [Correction]

Sur quelles parties de  $\mathbb{R}$ , les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$(a) x \mapsto x|x| \qquad (b) x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

### Exercice 3 [00247] [Correction]

Sur quelles parties de  $\mathbb{R}$ , les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$(a) f: x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (b) g: x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Calcul de dérivées

### Exercice 4 [01355] [Correction]

Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$(a) x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1} \qquad (b) x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2} \qquad (c) x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$$

### Exercice 5 [00737] [Correction]

Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$(a) x \mapsto x^x \qquad (b) x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x \qquad (c) x \mapsto \ln|x|$$

### Exercice 6 [00249] [Correction]

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \arctan(e^x), f_2(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) \text{ et } f_3(x) = \arctan\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right).$$

Qu'en déduire ?

## Dérivation d'application réciproque

### Exercice 7 [01367] [Correction]

Soit  $f: [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x.$$

Justifier que  $f$  réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que  $f^{-1}$  est continue et dérivable sur cet intervalle.

## Application de la dérivation

### Exercice 8 [01365] [Correction]

Déterminer toutes les applications  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

## Calcul de limites

### Exercice 9 [01357] [Correction]

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un point de  $I$  qui n'en soit pas une extrémité. Si le rapport

$$\frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h))$$

admet une limite finie quand  $h$  tend vers 0, celle-ci est appelée dérivée symétrique de  $f$  en  $a$ .

- (a) Montrer que, si  $f$  est dérivable à droite et à gauche en  $a$ , elle admet une dérivée symétrique en  $a$ .
- (b) Que dire de la réciproque ?

## Calcul de dérivées n-ième

### Exercice 10 [01362] [Correction]

Calculer la dérivée  $n$ -ième de

$$(a) x \mapsto x^2(1+x)^n \quad (b) x \mapsto (x^2+1)e^x$$

### Exercice 11 [01361] [Correction]

Calculer la dérivée  $n$ -ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

### Exercice 12 [00251] [Correction]

Calculer la dérivée  $n$ -ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

### Exercice 13 [00743] [Correction]

Calculer la dérivée  $n$ -ième de  $x \mapsto \cos^3 x$

### Exercice 14 [03863] [Correction]

Calculons la dérivée  $n$ -ième de la fonction réelle  $t \mapsto \cos(t)e^t$ .

### Exercice 15 [01363] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$ . Montrer que

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right).$$

### Exercice 16 [00254] [Correction]

Montrer que la dérivée d'ordre  $n$  de  $x^{n-1}e^{1/x}$  est

$$(-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x}.$$

### Exercice 17 [00252] [Correction]

Soit  $f: x \mapsto \arctan x$ .

(a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2).$$

(b) En déduire les racines de  $f^{(n)}$  pour  $n \geq 1$ .

### Exercice 18 [01364] [Correction]

Calculer de deux façons la dérivée  $n$ -ième de  $x \mapsto x^{2n}$ .

En déduire une expression de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

## Théorème de Rolle

### Exercice 19 [01370] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose que  $f'$  ne s'annule pas.

Montrer que  $f$  ne peut être périodique.

### Exercice 20 [01371] [Correction]

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $x \in ]0; 1[$  tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

### Exercice 21 [00256] [Correction]

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et vérifiant  $f'(a) > 0$  et  $f'(b) < 0$ .

Montrer que la dérivée de  $f$  s'annule.

### Exercice 22 [01372] [Correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^n$  s'annulant en  $n+1$  points distincts de  $I$ .

(a) Montrer que la dérivée  $n$ -ième de  $f$  s'annule au moins une fois sur  $I$ .

(b) Soit  $\alpha$  un réel. Montrer que la dérivée  $(n-1)$ -ième de  $f' + \alpha f$  s'annule au moins une fois sur  $I$ .

(indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire.)

**Exercice 23** [00262] [Correction]

On pose  $f: x \mapsto ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ .

- Montrer que  $f$  est une fonction polynomiale de degré  $n$ .
- Calculer  $f(1)$  et  $f(-1)$ .
- Montrer que  $f$  possède exactement  $n$  racines distinctes toutes dans  $] -1; 1[$ .

**Exercice 24** [02820] [Correction]

Soient  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$  et  $a, b, c$  trois points distincts de  $I$ .

Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d).$$

**Exercice 25** [01376] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $n$  fois dérivable.

Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0$$

alors il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

**Exercice 26** [01373] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 27** [01374] [Correction]

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty} f = f(0).$$

Montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 28** [01377] [Correction]

Soit  $a > 0$  et  $f$  une fonction réelle continue sur  $[0; a]$  et dérivable sur  $]0; a[$ .

On suppose

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0.$$

Montrer qu'il existe  $c \in ]0; a[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 29** [01380] [Correction]

Soit  $a > 0$  et  $f: [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

- Montrer que la dérivée de  $x \mapsto f(x)/x$  s'annule sur  $]0; a[$ .
- En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à  $f$  passe par l'origine.

**Exercice 30** [01375] [Correction]

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable vérifiant

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } f'(a) > 0, f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe  $c_1, c_2, c_3 \in ]a; b[$  tels que  $c_1 < c_2 < c_3$  et

$$f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0.$$

**Exercice 31** [03436] [Correction]

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que

$$f(c) = f''(c).$$

Indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire dépendant de  $f(x)$ ,  $f'(x)$  et  $e^x$

## Théorème des accroissements finis

### Exercice 32 [01386] [Correction]

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

Montrer que  $f$  est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

### Exercice 33 [01382] [Correction]

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a; a + 2h]$  (avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ ).

Montrer

$$\exists c \in ]a; a + 2h[, f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

(indice : introduire  $\varphi(x) = f(x + h) - f(x)$ .)

### Exercice 34 [01384] [Correction]

À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + 1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}).$$

### Exercice 35 [00267] [Correction]

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

### Exercice 36 [01385] [Correction]

Montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire, pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

### Exercice 37 [00727] [Correction]

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ .

(a) Si  $f''$  est bornée, que dire de  $f'(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  ?

(b) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse du a) ?

## Obtention d'inégalités

### Exercice 38 [01383] [Correction]

Établir les inégalités suivantes :

$$(a) \forall x \in ]-1; +\infty[, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$(b) \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

### Exercice 39 [01402] [Correction]

Soit  $p \in ]0; 1]$ .

(a) Établir que pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$(1+t)^p \leq 1+t^p.$$

(b) En déduire que pour tout  $x, y \geq 0$ ,

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p.$$

## Classe d'une fonction

### Exercice 40 [01387] [Correction]

Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $f$  est lipschitzienne.

### Exercice 41 [01388] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et périodique.

Montrer que  $f$  est lipschitzienne.

### Exercice 42 [01389] [Correction]

Montrer que la fonction  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 43** [ 01390 ] [[Correction](#)]

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 44** [ 01368 ] [[Correction](#)]

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f'(0) = 0$ .

Montrer qu'il existe  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2).$$

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- (a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$  est définie et continue sur  $]-\infty; 1]$ .  
Par opérations,  $f$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[$ .  
Quand  $h \rightarrow 0^+$ ,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sqrt{1 - h} \rightarrow 1$$

et quand  $h \rightarrow 0^-$ ,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \rightarrow -1$$

$f$  n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.

Quand  $h \rightarrow 0^-$ ,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{-h - 2h^2 - h^3}}{h} \rightarrow -\infty$$

$f$  n'est pas dérivable en 1, il y a une tangente verticale à son graphe en cet abscisse.

- (b)  $f(x) = (x^2 - 1) \arccos x^2$  est définie et continue sur  $[-1; 1]$ .  
Par opération  $f$  est dérivable sur  $] -1; 1[$ .  
Quand  $h \rightarrow 0^-$ ,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = (2+h) \arccos((1+h)^2) \rightarrow 0$$

$f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = 0$ .

Par parité,  $f$  est aussi dérivable en  $-1$  et  $f'(-1) = 0$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

- (a)  $f(x) = x|x|$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Par opérations,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
Quand  $h \rightarrow 0^+$ ,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \rightarrow 0$$

et quand  $h \rightarrow 0^-$ ,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = -h \rightarrow 0$$

$f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

- (b)  $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Par opérations  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
Quand  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{|h|+1} \rightarrow 1$$

donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

- (a)  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Par opérations,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
Quand  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

n'a pas de limite. La fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0.

- (b)  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Par opérations,  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
Quand  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow 0.$$

La fonction  $g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) = 0$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

- (a)  $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1}$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\left(\frac{\arctan x}{x^2+1}\right)' = \frac{1 - 2x \arctan x}{(x^2+1)^2}.$$

- (b)  $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-2}{(x+1)^3}.$$

- (c)  $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\left(\frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}\right)' = \frac{\cos x}{(\cos x+2)^4} + \frac{4 \sin^2 x}{(\cos x+2)^5} = \frac{4 + 2 \cos x - 3 \cos^2 x}{(\cos x+2)^5}.$$

**Exercice 5 : [énoncé]**(a)  $x \mapsto x^x$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (1 + \ln x)x^x.$$

(b)  $x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

$$((\operatorname{ch} x)^x)' = (e^{x \ln \operatorname{ch} x})' = (\ln \operatorname{ch} x + x \operatorname{th} x)(\operatorname{ch} x)^x.$$

(c)  $x \mapsto \ln |x|$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ ,

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

**Exercice 6 : [énoncé]**

$$f_1'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, f_2'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \text{ et } f_3'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

On en déduit

$$f_1(x) = \frac{1}{2}f_2(x) + \frac{\pi}{4} = f_3(x) + \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 7 : [énoncé]**

$f$  est continue et strictement croissante,  $f(0) = 0$  et  $f(\pi/2) = 1 + \pi/2$  donc  $f$  réalise une bijection de  $[0; \pi/2]$  vers  $[0; 1 + \pi/2]$  et son application réciproque  $f^{-1}$  est continue.

 $f$  est dérivable sur  $]0; \pi/2]$  avec

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$$

donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(]0; \pi/2]) = ]0; 1 + \pi/2]$ .Étude de la dérivabilité de  $f^{-1}$  en 0Quand  $h \rightarrow 0^+$ , en posant  $x = f^{-1}(h) \rightarrow 0$ 

$$\frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{x}{f(x)}.$$

Or

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + x} \sim \sqrt{x} \rightarrow 0$$

donc  $f^{-1}$  est dérivable en 0 et  $(f^{-1})'(0) = 0$ .**Exercice 8 : [énoncé]**Soit  $f$  solution. En dérivant la relation par rapport à  $x$ , on obtient :

$$f'(x + y) = f'(x).$$

La fonction  $f$  est donc de dérivée constante et par suite  $f$  est affine.De plus la relation  $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  entraîne  $f(0) = 0$  et donc  $f$  est linéaire.

Inversement : ok.

**Exercice 9 : [énoncé]**(a) Si  $f_d'(a)$  et  $f_g'(a)$  existent alors

$$\frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h)) = \frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a)) + \frac{1}{-2h}(f(a-h) - f(a))$$

et donc

$$\frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}(f_d'(a) + f_g'(a)).$$

(b) Pour  $f(x) = \sqrt{|x|}$ , la dérivée symétrique en 0 existe alors que la fonction n'y est pas dérivable ni à droite, ni à gauche.**Exercice 10 : [énoncé]**

On exploite la formule de Leibniz

(a)

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = \binom{n}{0}x^2((1+x)^n)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)'((1+x)^n)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)''((1+x)^n)^{(n-2)}$$

donc

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = n!x^2 + 2n.n!x(1+x) + n(n-1)\frac{n!}{2}(1+x)^2.$$

(b)

$$((x^2+1)e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(x^2+1)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = (x^2+2nx+n(n-1)+1)e^x.$$

**Exercice 11 : [énoncé]**

En calculant les dérivées successives

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

on montre par récurrence

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

De même, mais en gérant de plus un signe

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Enfin

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

**Exercice 12 : [énoncé]**

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}.$$

Or

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ et } \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

**Exercice 13 : [énoncé]**

(a) On a

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

donc on peut linéariser

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x).$$

On sait

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2) \text{ et } (\cos 3x)^{(n)} = 3^n \cos(3x + n\pi/2)$$

et on obtient donc

$$(\cos^3 x)^{(n)} = \frac{1}{4}(3 \cos(x + n\pi/2) + 3^n \cos(3x + n\pi/2)).$$

**Exercice 14 : [énoncé]**

On peut écrire

$$\cos(t)e^t = \operatorname{Re}(e^{(1+i)t})$$

et donc

$$(\cos(t)e^t)^{(n)} = (\operatorname{Re}(e^{(1+i)t}))^{(n)} = \operatorname{Re}((1+i)^n e^{(1+i)t}).$$

Or  $(1+i)^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4}$  puis

$$(\cos(t)e^t)^{(n)} = 2^{n/2} e^t \cos(t + n\pi/4).$$

**Exercice 15 : [énoncé]**

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $n = 0$  : ok

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .

$$f^{(n+1)}(x) = \left(2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)'$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \left(\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right) e^{x\sqrt{3}}$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1} \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{6}\right) e^{x\sqrt{3}}.$$

Récurrence établie.

On peut aussi écrire

$$f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x = \operatorname{Im}(e^{(\sqrt{3}+i)x})$$

et exploiter ceci pour calculer directement la dérivée d'ordre  $n$ .

**Exercice 16 :** [énoncé]

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $n = 0$  : ok.

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .

$$(x^n e^{1/x})^{(n+1)} = (x \cdot x^{n-1} e^{1/x})^{(n+1)} = x(x^{n-1} e^{1/x})^{(n+1)} + (n+1)(x^{n-1} e^{1/x})^{(n)}$$

donc

$$(x^n e^{1/x})^{(n+1)} = x((-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x})' + (n+1)(-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x}$$

ce qui donne

$$(x^n e^{1/x})^{(n+1)} = (-1)^{n+1} x^{-(n+2)} e^{1/x}.$$

Récurrence établie.

**Exercice 17 :** [énoncé]

(a) Par récurrence sur  $n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et}$$

$$\cos(f(x)) \sin(f(x) + \pi/2) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Supposons la propriété vérifiée au rang  $n \geq 1$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{1+x^2} \left[ \begin{array}{l} -\sin(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2) \\ + \cos(nf(x) + n\pi/2) \cos(f(x)) \end{array} \right] \cos^{n-1}(f(x)).$$

Or

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2(f(x))$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = n! \left[ \begin{array}{l} \sin(f(x)) \cos(nf(x) + (n+1)\pi/2) \\ + \sin(nf(x) + (n+1)\pi/2) \cos(f(x)) \end{array} \right] \cos^{n+1}(f(x))$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = n! \sin((n+1)f(x) + (n+1)\pi/2) \cos^{n+1}(f(x)).$$

Récurrence établie.

(b) Puisque  $\arctan x \in ]-\pi/2; \pi/2[$ ,  $\cos(f(x)) \neq 0$ .

Par suite

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff \sin(nf(x) + n\pi/2) = 0$$

et donc

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Au final, les racines de  $f^{(n)}$  sont les

$$\cot \frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

**Exercice 18 :** [énoncé]

D'une part

$$(x^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} x^n.$$

D'autre part

$$(x^{2n})^{(n)} = (x^n \times x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)}$$

et donc

$$(x^{2n})^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^n = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^n.$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

**Exercice 19 :** [énoncé]

Si  $f$  est  $T$ -périodique avec  $T > 0$  alors en appliquant le théorème de Rolle entre par exemple 0 et  $T$ , la dérivée de  $f$  s'annule.

**Exercice 20 :** [énoncé]

Soit  $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$$

$\varphi$  est dérivable et  $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ . Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

**Exercice 21 : [énoncé]**

$f$  admet un maximum sur  $[a; b]$  qui ne peut être ni en  $a$ , ni en  $b$  : la dérivée de  $f$  s'y annule.

**Exercice 22 : [énoncé]**

- (a) Notons  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  les  $n + 1$  points où nous savons que  $f$  s'annule. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on peut appliquer le théorème de Rolle à  $f$  sur  $[a_{i-1}; a_i]$ .  
En effet  $f$  est continue sur  $[a_{i-1}; a_i]$ , dérivable sur  $]a_{i-1}; a_i[$  et  $f(a_{i-1}) = 0 = f(a_i)$ .  
Par le théorème de Rolle, il existe  $b_i \in ]a_{i-1}; a_i[$  tel que  $f'(b_i) = 0$ .  
Puisque  $b_1 < a_1 < b_2 < \dots < a_{n-1} < b_n$ , les  $b_1, \dots, b_n$  sont deux à deux distincts.  
Ainsi  $f'$  s'annule au moins  $n$  fois.  
De même,  $f''$  s'annule au moins  $n - 1$  fois et ainsi de suite jusqu'à  $f^{(n)}$  s'annule au moins une fois.
- (b) Considérons  $g(x) = f(x)e^{\alpha x}$ .  $g$  s'annule  $n + 1$  fois donc  $g'$  s'annule au moins  $n$  fois.  
Or  $g'(x) = (f'(x) + \alpha f(x))e^{\alpha x}$  donc les annulations de  $g'$  sont les annulations de  $f' + \alpha f$ .  
Puisque  $f' + \alpha f$  s'annule  $n$  fois, la dérivée  $(n - 1)$ -ième de  $f' + \alpha f$  s'annule au moins une fois.

**Exercice 23 : [énoncé]**

- (a)  $(X^2 - 1)^n$  est de degré  $2n$  donc  $((X^2 - 1)^n)^{(n)}$  est de degré  $n$ .
- (b) Introduisons  $g: x \mapsto (x^2 - 1)^n$  de sorte que  $f = g^{(n)}$   
Quand  $x \rightarrow 1$  On a

$$g(x) = (x + 1)^n(x - 1)^n = 2^n(x - 1)^n + o((x - 1)^n).$$

Par la formule de Taylor-Young, on a parallèlement

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x - 1)^n + o((x - 1)^n)$$

donc

$$f(1) = g^{(n)}(1) = 2^n n!$$

et de manière similaire

$$f(-1) = (-1)^n 2^n n!$$

- (c) 1 et  $-1$  sont racines de multiplicité  $n$  de  $g: x \mapsto (x^2 - 1)^n$ , 1 et  $-1$  sont donc racines de  $g, g', \dots, g^{(n-1)}$ .

En appliquant le théorème de Rolle, on montre que  $g', g'', \dots, g^{(n)} = f$  admettent resp.  $1, 2, \dots, n$  racines dans  $] -1; 1[$ . Puisque  $f$  est de degré  $n$ , celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.

**Exercice 24 : [énoncé]**

Considérons

$$g: x \mapsto (x - b)f(a) + (a - x)f(b) + (b - a)f(x) - \frac{1}{2}(a - b)(b - x)(x - a)K$$

où la constante  $K$  est choisie de sorte que  $g(c) = 0$  (ce qui est possible).

La fonction  $g$  s'annule en  $a$ , en  $b$  et en  $c$  donc par le théorème de Rolle, il existe  $d \in I$  tel que  $g''(d) = 0$  ce qui résout le problème posé.

**Exercice 25 : [énoncé]**

En appliquant le théorème de Rolle à  $f$  entre  $a$  et  $b$  : il existe  $c_1 \in ]a; b[$  tel que  $f'(c_1) = 0$ .

En appliquant le théorème de Rolle à  $f'$  entre  $a$  et  $c_1$  : il existe  $c_2 \in ]a; c_1[$  tel que  $f''(c_2) = 0$ .

...

En appliquant le théorème de Rolle à  $f^{(n-1)}$  entre  $a$  et  $c_{n-1}$  : il existe  $c_n \in ]a; c_{n-1}[$  tel que  $f^{(n)}(c_n) = 0$ .  
 $c = c_n$  résout le problème.

**Exercice 26 : [énoncé]**

Puisque  $\lim_{-\infty} f = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ , il existe  $a < 0$  et  $b > 0$  tels que

$$f(a) > f(0) + 1 \text{ et } f(b) > f(0) + 1.$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre  $a$  et 0, d'une part, et 0 et  $b$  d'autre part, il existe  $\alpha \in ]a; 0[$  et  $\beta \in ]0; b[$  tels que  $f(\alpha) = f(0) + 1 = f(\beta)$ .

En appliquant le théorème de Rolle entre  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe  $c \in ]\alpha; \beta[ \subset \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 27 : [énoncé]**

Si  $f$  est constante, la propriété est immédiate.

Sinon, il existe  $x_0 \in ]0; +\infty[$  tel que  $f(x_0) \neq f(0)$ .

Posons  $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$  qui est une valeur intermédiaire à  $f(0)$  et  $f(x_0)$ .  
 Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $a \in ]0; x_0[$  tel que  $f(a) = y$ .  
 Puisque  $\lim_{+\infty} f = f(0)$ ,  $y$  est une valeur intermédiaire à  $f(x_0)$  et une valeur  $f(x_1)$  avec  $x_1$  suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $b \in ]x_0; x_1]$  tel que  $f(b) = y$ .  
 En appliquant le théorème de Rolle sur  $[a; b]$ , on peut alors conclure.

**Exercice 28 : [énoncé]**

Quitte à considérer  $-f$ , on peut supposer  $f(a) > 0$  et  $f'(a) < 0$ .  
 Puisque  $f'(a) < 0$ , il existe  $b \in ]0; a[$  tel que  $f(b) > f(a)$ .  
 En appliquant le théorème de valeurs intermédiaires entre 0 et  $b$ , il existe  $\alpha \in ]0; b[$  tel que  $f(\alpha) = f(a)$ .  
 En appliquant le théorème de Rolle entre  $\alpha$  et  $a$ , on obtient  $c \in ]\alpha; a[ \subset ]0; a[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 29 : [énoncé]**

- (a) La fonction  $g: x \mapsto f(x)/x$  est définie, continue et dérivable sur  $]0; a]$ .  
 Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$g(x) \rightarrow f'(0) = 0.$$

Prolongeons  $g$  par continuité en 0 en posant  $g(0) = 0$ .  
 Puisque  $g$  est continue sur  $[0; a]$ , dérivable sur  $]0; a[$  et puisque  $g(0) = g(a)$ , le théorème de Rolle assure l'annulation de la dérivée de  $g$  en un point  $c \in ]0; a[$ .

- (b)

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

donc  $g'(c) = 0$  donne  $cf'(c) = f(c)$ .

La tangente à  $f$  en  $c$  a pour équation :

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x.$$

Elle passe par l'origine.

**Exercice 30 : [énoncé]**

Puisque  $f(a) = 0$  et  $f'(a) > 0$ , il existe  $x_1 \in ]a; b[$  tel que  $f(x_1) > 0$ .  
 En effet, si pour tout  $x_1 \in ]a; b[$ ,  $f(x_1) \leq 0$  alors quand  $h \rightarrow 0^+$ ,  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$  et donc  $f'(a) \leq 0$ .  
 De même, puisque  $f(b) = 0$  et  $f'(b) > 0$ , il existe  $x_2 \in ]a; b[$  tel que  $f(x_2) < 0$ .

Puisque  $f$  prend une valeur positive et une valeur négative dans  $]a; b[$ , par le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  s'y annule.  
 Ainsi il existe  $c_2 \in ]a; b[$  tel que  $f(c_2) = 0$ .  
 En appliquant le théorème de Rolle sur  $[a; c_2]$  et  $[c_2; b]$ , on obtient  $c_1$  et  $c_3$ .

**Exercice 31 : [énoncé]**

Introduisons  $\varphi: x \mapsto (f(x) - f'(x))e^x$ .  
 La fonction  $\varphi$  est définie et continue sur  $[a; b]$ ,  $\varphi$  est dérivable sur  $]a; b[$  et  $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ .  
 Par le théorème de Rolle, on peut affirmer qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que

$$\varphi'(c) = 0.$$

Or

$$\varphi'(x) = (f(x) - f''(x))e^x$$

donc  $\varphi'(c) = 0$  donne

$$f(c) = f''(c).$$

**Exercice 32 : [énoncé]**

( $\Leftarrow$ ) En vertu de l'inégalité des accroissements finis.

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  est  $k$  lipschitzienne alors  $\forall x, y \in I$  tels que  $x \neq y$  on a  $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq k$ .

À la limite quand  $y \rightarrow x$  on obtient  $|f'(x)| \leq k$ . Par suite  $f'$  est bornée.

**Exercice 33 : [énoncé]**

La fonction  $\varphi$  proposée est définie et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a; a+h]$ .

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à  $\varphi$  entre  $a$  et  $a+h$ , il existe  $b \in ]a; a+h[$  tel que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(b) = h(f'(b+h) - f'(b)).$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à  $f'$  entre  $b$  et  $b+h$ , il existe  $c \in ]b; b+h[ \subset ]a; a+2h[$  tel que

$$f'(b+h) - f'(b) = hf''(c) \text{ puis } f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

**Exercice 34 :** [énoncé]

Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction  $x \mapsto xe^{1/x}$  entre  $x$  et  $x+1$  :

il existe  $c_x \in ]x; x+1[$  tel que

$$(x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x} = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}}(x+1-x) = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}}.$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $c_x \rightarrow +\infty$  car  $c_x \geq x$ .

Par suite

$$\left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}} \rightarrow 1$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}) = 1.$$

**Exercice 35 :** [énoncé]

En appliquant le théorème des accroissements finis à  $x \mapsto x^{1/c}$  entre  $n$  et  $n+1$ , on obtient

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1 - \ln c}{c^2} c^{1/c}$$

avec  $c \in ]n; n+1[$ .

Puisque  $c \sim n \rightarrow +\infty$ ,  $\ln c \sim \ln n$  et puisque  $c^{1/c} \rightarrow 1$

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

On applique le théorème des accroissements finis à  $x \mapsto \ln x$  entre  $x$  et  $x+1$ .

Il existe  $c \in ]x; x+1[$  tel que

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{c}.$$

Or  $x < c < x+1$  donne

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

puis l'encadrement voulu.

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln p \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \ln p - \ln(p-1)$$

donne

$$\ln \frac{kn+1}{n+1} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \ln k.$$

Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \ln k.$$

**Exercice 37 :** [énoncé]

(a) Posons  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $|f''(x)| \leq M$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .  
Soit  $\varepsilon > 0$ . La suite  $(x_n)$  de terme général

$$x_n = n \frac{\varepsilon}{M}$$

diverge vers  $+\infty$  et donc

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \rightarrow 0.$$

Par suite il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe  $c_n \in ]x_n; x_{n+1}[$  tel que

$$|f'(c_n)|(x_{n+1} - x_n) \leq \frac{\varepsilon^2}{M}$$

ce qui donne

$$|f'(c_n)| \leq \varepsilon.$$

Puisque  $f''$  est bornée par  $M$ , la fonction  $f'$  est  $M$ -lipschitzienne et donc

$$\forall u \in [x_n; x_{n+1}], |f'(u) - f'(c_n)| \leq M |u - c_n| \leq \varepsilon$$

puis

$$\forall u \in [x_n; x_{n+1}], |f'(u)| \leq \varepsilon + |f'(c_n)| \leq 2\varepsilon$$

et, puisque ceci vaut pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a en posant  $A = x_N$ ,

$$\forall u \geq A, |f'(u)| \leq 2\varepsilon.$$

On peut conclure que  $f'$  converge vers 0 en  $+\infty$ .

(b) Posons

$$f(t) = \frac{\cos(t^2)}{t+1}.$$

On vérifie aisément que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et converge en  $+\infty$  sans que  $f'$  converge en 0.

**Exercice 38 :** [énoncé]

(a) Soit  $f: x \mapsto x - \ln(1+x)$  définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Le tableau des variations de  $f$  est alors

$x$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que  $f$  est positive.

Soit  $g: x \mapsto \ln(1+x) - x/(1+x)$  définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; +\infty[$ .

$$g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Le tableau des variations de  $g$  est alors

$x$	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que  $g$  est positive.

(b) Soit  $f: x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$  définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$f'''(x) = e^x \geq 0.$$

On obtient les variations suivantes

$x$	0	$+\infty$
$f''(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que  $f$  est positive.

**Exercice 39 :** [énoncé]

(a) Étudions la fonction  $\delta: t \mapsto 1 + t^p - (1+t)^p$  définie continue sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On a  $\delta(0) = 0$  et pour  $t > 0$ ,

$$\delta'(t) = p(t^{p-1} - (1+t)^{p-1}).$$

Puisque  $p-1 \leq 0$ ,  $t^{p-1} \geq (1+t)^{p-1}$  et donc  $\delta'(t) \geq 0$ . On en déduit que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\delta(t) \geq 0$  puis l'inégalité demandée.

(b) Pour  $x = 0$ , l'inégalité est immédiate et pour  $x > 0$ ,

$$(x+y)^p = x^p \left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \leq x^p \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = x^p + y^p.$$

**Exercice 40 :** [énoncé]

$f'$  est continue sur le segment  $[a; b]$  elle y est donc bornée par un certain  $M$ . Par l'inégalité des accroissements finis,  $f$  est  $M$  lipschitzienne.

**Exercice 41 :** [énoncé]

La dérivée de  $f$  est continue et périodique donc bornée par son max sur une période (qui existe par continuité sur un segment). Par l'inégalité des accroissements finis, il en découle que  $f$  est lipschitzienne.

**Exercice 42 :** [énoncé]

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

Pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = 2x \ln x + x$ .

Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f'(x) \rightarrow 0$  donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

De plus,  $f'$  est continue en 0 et finalement  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 43 :** [énoncé]

Procédons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $n = 0$ , la fonction considérée est continue.

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .

$f_{n+1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

Pour  $x \neq 0$ ,  $f'_{n+1}(x) = (n+2)f_n(x)$ .

Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $f'_{n+1}(x) \rightarrow 0 = (n+2)f_n(0)$  donc  $f_{n+1}$  est dérivable en 0 et  $f'_{n+1}(0) = 0$ .

Ainsi  $f_{n+1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'_{n+1} = (n+2)f_n$ .

Par hypothèse de récurrence,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et donc  $f_{n+1}$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ .

Récurrence établie.

**Exercice 44 :** [\[énoncé\]](#)

Posons  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(t) = f(\sqrt{t}).$$

Par composition  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x > 0, g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

$g$  est continue et

$$g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t}) - f'(0)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{f''(0)}{2}$$

donc  $g$  est dérivable et  $g'$  est continue en 0.

Ainsi  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .