

Dérivation

Dérivabilité

Exercice 1 [01354] [Correction]

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$(a) x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3} \qquad (b) x \mapsto (x^2 - 1) \arccos(x^2)$$

Exercice 2 [00736] [Correction]

Sur quelles parties de \mathbb{R} , les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$(a) x \mapsto x|x| \qquad (b) x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

Exercice 3 [00247] [Correction]

Sur quelles parties de \mathbb{R} , les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$(a) f: x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (b) g: x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calcul de dérivées

Exercice 4 [01355] [Correction]

Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$(a) x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1} \qquad (b) x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2} \qquad (c) x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$$

Exercice 5 [00737] [Correction]

Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$(a) x \mapsto x^x \qquad (b) x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x \qquad (c) x \mapsto \ln|x|$$

Exercice 6 [00249] [Correction]

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \arctan(e^x), f_2(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) \text{ et } f_3(x) = \arctan\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right).$$

Qu'en déduire ?

Dérivation d'application réciproque

Exercice 7 [01367] [Correction]

Soit $f: [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x.$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Application de la dérivation

Exercice 8 [01365] [Correction]

Déterminer toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Calcul de limites

Exercice 9 [01357] [Correction]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en soit pas une extrémité. Si le rapport

$$\frac{1}{2h} (f(a+h) - f(a-h))$$

admet une limite finie quand h tend vers 0, celle-ci est appelée dérivée symétrique de f en a .

- (a) Montrer que, si f est dérivable à droite et à gauche en a , elle admet une dérivée symétrique en a .
- (b) Que dire de la réciproque ?

Calcul de dérivées n-ième

Exercice 10 [01362] [Correction]

Calculer la dérivée n -ième de

$$(a) x \mapsto x^2(1+x)^n \qquad (b) x \mapsto (x^2+1)e^x$$

Exercice 11 [01361] [Correction]

Calculer la dérivée n -ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 12 [00251] [Correction]

Calculer la dérivée n -ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 13 [00743] [Correction]

Calculer la dérivée n -ième de $x \mapsto \cos^3 x$

Exercice 14 [03863] [Correction]

Calculons la dérivée n -ième de la fonction réelle $t \mapsto \cos(t)e^t$.

Exercice 15 [01363] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$. Montrer que

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right).$$

Exercice 16 [00254] [Correction]

Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1}e^{1/x}$ est

$$(-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x}.$$

Exercice 17 [00252] [Correction]

Soit $f: x \mapsto \arctan x$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2).$$

(b) En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 18 [01364] [Correction]

Calculer de deux façons la dérivée n -ième de $x \mapsto x^{2n}$.

En déduire une expression de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Théorème de Rolle

Exercice 19 [01370] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas.

Montrer que f ne peut être périodique.

Exercice 20 [01371] [Correction]

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0; 1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 21 [00256] [Correction]

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

Montrer que la dérivée de f s'annule.

Exercice 22 [01372] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^n s'annulant en $n+1$ points distincts de I .

(a) Montrer que la dérivée n -ième de f s'annule au moins une fois sur I .

(b) Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ -ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I .

(indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire.)

Exercice 23 [00262] [Correction]

On pose $f: x \mapsto ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$.

- Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n .
- Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
- Montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $] -1; 1[$.

Exercice 24 [02820] [Correction]

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a, b, c trois points distincts de I .

Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d).$$

Exercice 25 [01376] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.

Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0$$

alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 26 [01373] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 27 [01374] [Correction]

Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty} f = f(0).$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 28 [01377] [Correction]

Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0; a]$ et dérivable sur $]0; a[$.

On suppose

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]0; a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 29 [01380] [Correction]

Soit $a > 0$ et $f: [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

- Montrer que la dérivée de $x \mapsto f(x)/x$ s'annule sur $]0; a[$.
- En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 30 [01375] [Correction]

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } f'(a) > 0, f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a; b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et

$$f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 31 [03436] [Correction]

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f(c) = f''(c).$$

Indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et e^x

Théorème des accroissements finis

Exercice 32 [01386] [Correction]

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Montrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

Exercice 33 [01382] [Correction]

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[a; a + 2h]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).

Montrer

$$\exists c \in]a; a + 2h[, f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

(indice : introduire $\varphi(x) = f(x + h) - f(x)$.)

Exercice 34 [01384] [Correction]

À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + 1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}).$$

Exercice 35 [00267] [Correction]

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 36 [01385] [Correction]

Montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

Exercice 37 [00727] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

(a) Si f'' est bornée, que dire de $f'(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?

(b) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse du a) ?

Obtention d'inégalités

Exercice 38 [01383] [Correction]

Établir les inégalités suivantes :

$$(a) \forall x \in]-1; +\infty[, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$(b) \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 39 [01402] [Correction]

Soit $p \in]0; 1]$.

(a) Établir que pour tout $t \geq 0$, on a

$$(1+t)^p \leq 1+t^p.$$

(b) En déduire que pour tout $x, y \geq 0$,

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p.$$

Classe d'une fonction

Exercice 40 [01387] [Correction]

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 41 [01388] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 et périodique.

Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 42 [01389] [Correction]

Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 43 [01390] [[Correction](#)]

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} .

Exercice 44 [01368] [[Correction](#)]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2).$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

- (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est définie et continue sur $] -\infty ; 1]$.
Par opérations, f est dérivable sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; 1[$.
Quand $h \rightarrow 0^+$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sqrt{1 - h} \rightarrow 1$$

et quand $h \rightarrow 0^-$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \rightarrow -1$$

f n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.

Quand $h \rightarrow 0^-$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{-h - 2h^2 - h^3}}{h} \rightarrow -\infty$$

f n'est pas dérivable en 1, il y a une tangente verticale à son graphe en cet abscisse.

- (b) $f(x) = (x^2 - 1) \arccos x^2$ est définie et continue sur $[-1 ; 1]$.
Par opération f est dérivable sur $] -1 ; 1[$.
Quand $h \rightarrow 0^-$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = (2+h) \arccos((1+h)^2) \rightarrow 0$$

f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Exercice 2 : [énoncé]

- (a) $f(x) = x|x|$ est définie et continue sur \mathbb{R} .
Par opérations, f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
Quand $h \rightarrow 0^+$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \rightarrow 0$$

et quand $h \rightarrow 0^-$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = -h \rightarrow 0$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

- (b) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ est définie et continue sur \mathbb{R} .
Par opérations f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
Quand $h \rightarrow 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{|h|+1} \rightarrow 1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]

- (a) f est définie et continue sur \mathbb{R} .
Par opérations, f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
Quand $h \rightarrow 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

n'a pas de limite. La fonction f n'est pas dérivable en 0.

- (b) g est définie et continue sur \mathbb{R} .
Par opérations, g est dérivable sur \mathbb{R}^* .
Quand $h \rightarrow 0$,

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow 0.$$

La fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Exercice 4 : [énoncé]

- (a) $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} ,

$$\left(\frac{\arctan x}{x^2+1}\right)' = \frac{1 - 2x \arctan x}{(x^2+1)^2}.$$

- (b) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-2}{(x+1)^3}.$$

- (c) $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} ,

$$\left(\frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}\right)' = \frac{\cos x}{(\cos x + 2)^4} + \frac{4 \sin^2 x}{(\cos x + 2)^5} = \frac{4 + 2 \cos x - 3 \cos^2 x}{(\cos x + 2)^5}.$$

Exercice 5 : [énoncé](a) $x \mapsto x^x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* ,

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (1 + \ln x)x^x.$$

(b) $x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} ,

$$((\operatorname{ch} x)^x)' = (e^{x \ln \operatorname{ch} x})' = (\ln \operatorname{ch} x + x \operatorname{th} x)(\operatorname{ch} x)^x.$$

(c) $x \mapsto \ln |x|$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* ,

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Exercice 6 : [énoncé]

$$f_1'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, f_2'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \text{ et } f_3'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

On en déduit

$$f_1(x) = \frac{1}{2}f_2(x) + \frac{\pi}{4} = f_3(x) + \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 7 : [énoncé]

f est continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(\pi/2) = 1 + \pi/2$ donc f réalise une bijection de $[0; \pi/2]$ vers $[0; 1 + \pi/2]$ et son application réciproque f^{-1} est continue.

 f est dérivable sur $]0; \pi/2]$ avec

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0; \pi/2]) =]0; 1 + \pi/2]$.Étude de la dérivabilité de f^{-1} en 0Quand $h \rightarrow 0^+$, en posant $x = f^{-1}(h) \rightarrow 0$

$$\frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{x}{f(x)}.$$

Or

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + x} \sim \sqrt{x} \rightarrow 0$$

donc f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$.**Exercice 8 : [énoncé]**Soit f solution. En dérivant la relation par rapport à x , on obtient :

$$f'(x + y) = f'(x).$$

La fonction f est donc de dérivée constante et par suite f est affine.De plus la relation $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ entraîne $f(0) = 0$ et donc f est linéaire.

Inversement : ok.

Exercice 9 : [énoncé](a) Si $f_d'(a)$ et $f_g'(a)$ existent alors

$$\frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h)) = \frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a)) + \frac{1}{-2h}(f(a-h) - f(a))$$

et donc

$$\frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}(f_d'(a) + f_g'(a)).$$

(b) Pour $f(x) = \sqrt{|x|}$, la dérivée symétrique en 0 existe alors que la fonction n'y est pas dérivable ni à droite, ni à gauche.**Exercice 10 : [énoncé]**

On exploite la formule de Leibniz

(a)

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = \binom{n}{0}x^2((1+x)^n)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)'((1+x)^n)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)''((1+x)^n)^{(n-2)}$$

donc

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = n!x^2 + 2n.n!x(1+x) + n(n-1)\frac{n!}{2}(1+x)^2.$$

(b)

$$((x^2+1)e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(x^2+1)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = (x^2+2nx+n(n-1)+1)e^x.$$

Exercice 11 : [énoncé]

En calculant les dérivées successives

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

on montre par récurrence

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

De même, mais en gérant de plus un signe

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Enfin

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Exercice 12 : [énoncé]

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}.$$

Or

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ et } \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) On a

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

donc on peut linéariser

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x).$$

On sait

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2) \text{ et } (\cos 3x)^{(n)} = 3^n \cos(3x + n\pi/2)$$

et on obtient donc

$$(\cos^3 x)^{(n)} = \frac{1}{4}(3 \cos(x + n\pi/2) + 3^n \cos(3x + n\pi/2)).$$

Exercice 14 : [énoncé]

On peut écrire

$$\cos(t)e^t = \operatorname{Re}(e^{(1+i)t})$$

et donc

$$(\cos(t)e^t)^{(n)} = (\operatorname{Re}(e^{(1+i)t}))^{(n)} = \operatorname{Re}((1+i)^n e^{(1+i)t}).$$

Or $(1+i)^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4}$ puis

$$(\cos(t)e^t)^{(n)} = 2^{n/2} e^t \cos(t + n\pi/4).$$

Exercice 15 : [énoncé]

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)'$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \left(\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right) e^{x\sqrt{3}}$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1} \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{6}\right) e^{x\sqrt{3}}.$$

Récurrence établie.

On peut aussi écrire

$$f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x = \operatorname{Im}(e^{(\sqrt{3}+i)x})$$

et exploiter ceci pour calculer directement la dérivée d'ordre n .

Exercice 16 : [énoncé]

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$: ok.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$(x^n e^{1/x})^{(n+1)} = (x \cdot x^{n-1} e^{1/x})^{(n+1)} = x(x^{n-1} e^{1/x})^{(n+1)} + (n+1)(x^{n-1} e^{1/x})^{(n)}$$

donc

$$(x^n e^{1/x})^{(n+1)} = x((-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x})' + (n+1)(-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x}$$

ce qui donne

$$(x^n e^{1/x})^{(n+1)} = (-1)^{n+1} x^{-(n+2)} e^{1/x}.$$

Récurrence établie.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et}$$

$$\cos(f(x)) \sin(f(x) + \pi/2) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Supposons la propriété vérifiée au rang $n \geq 1$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{1+x^2} \left[\begin{array}{l} -\sin(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2) \\ +\cos(nf(x) + n\pi/2) \cos(f(x)) \end{array} \right] \cos^{n-1}(f(x)).$$

Or

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2(f(x))$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = n! \left[\begin{array}{l} \sin(f(x)) \cos(nf(x) + (n+1)\pi/2) \\ +\sin(nf(x) + (n+1)\pi/2) \cos(f(x)) \end{array} \right] \cos^{n+1}(f(x))$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = n! \sin((n+1)f(x) + (n+1)\pi/2) \cos^{n+1}(f(x)).$$

Récurrence établie.

(b) Puisque $\arctan x \in]-\pi/2; \pi/2[$, $\cos(f(x)) \neq 0$.

Par suite

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff \sin(nf(x) + n\pi/2) = 0$$

et donc

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Au final, les racines de $f^{(n)}$ sont les

$$\cot \frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Exercice 18 : [énoncé]

D'une part

$$(x^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} x^n.$$

D'autre part

$$(x^{2n})^{(n)} = (x^n \times x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)}$$

et donc

$$(x^{2n})^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^n = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^n.$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 19 : [énoncé]

Si f est T -périodique avec $T > 0$ alors en appliquant le théorème de Rolle entre par exemple 0 et T , la dérivée de f s'annule.

Exercice 20 : [énoncé]

Soit $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$$

φ est dérivable et $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

Exercice 21 : [énoncé]

f admet un maximum sur $[a; b]$ qui ne peut être ni en a , ni en b : la dérivée de f s'y annule.

Exercice 22 : [énoncé]

- (a) Notons $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ les $n + 1$ points où nous savons que f s'annule. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a_{i-1}; a_i]$.
En effet f est continue sur $[a_{i-1}; a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}; a_i[$ et $f(a_{i-1}) = 0 = f(a_i)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $b_i \in]a_{i-1}; a_i[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
Puisque $b_1 < a_1 < b_2 < \dots < a_{n-1} < b_n$, les b_1, \dots, b_n sont deux à deux distincts.
Ainsi f' s'annule au moins n fois.
De même, f'' s'annule au moins $n - 1$ fois et ainsi de suite jusqu'à $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
- (b) Considérons $g(x) = f(x)e^{\alpha x}$. g s'annule $n + 1$ fois donc g' s'annule au moins n fois.
Or $g'(x) = (f'(x) + \alpha f(x))e^{\alpha x}$ donc les annulations de g' sont les annulations de $f' + \alpha f$.
Puisque $f' + \alpha f$ s'annule n fois, la dérivée $(n - 1)$ -ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois.

Exercice 23 : [énoncé]

- (a) $(X^2 - 1)^n$ est de degré $2n$ donc $((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ est de degré n .
- (b) Introduisons $g: x \mapsto (x^2 - 1)^n$ de sorte que $f = g^{(n)}$
Quand $x \rightarrow 1$ On a

$$g(x) = (x + 1)^n(x - 1)^n = 2^n(x - 1)^n + o((x - 1)^n).$$

Par la formule de Taylor-Young, on a parallèlement

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x - 1)^n + o((x - 1)^n)$$

donc

$$f(1) = g^{(n)}(1) = 2^n n!$$

et de manière similaire

$$f(-1) = (-1)^n 2^n n!$$

- (c) 1 et -1 sont racines de multiplicité n de $g: x \mapsto (x^2 - 1)^n$, 1 et -1 sont donc racines de $g, g', \dots, g^{(n-1)}$.

En appliquant le théorème de Rolle, on montre que $g', g'', \dots, g^{(n)} = f$ admettent resp. $1, 2, \dots, n$ racines dans $] -1; 1[$. Puisque f est de degré n , celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.

Exercice 24 : [énoncé]

Considérons

$$g: x \mapsto (x - b)f(a) + (a - x)f(b) + (b - a)f(x) - \frac{1}{2}(a - b)(b - x)(x - a)K$$

où la constante K est choisie de sorte que $g(c) = 0$ (ce qui est possible).

La fonction g s'annule en a , en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d \in I$ tel que $g''(d) = 0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 25 : [énoncé]

En appliquant le théorème de Rolle à f entre a et b : il existe $c_1 \in]a; b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à f' entre a et c_1 : il existe $c_2 \in]a; c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.

...

En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n-1)}$ entre a et c_{n-1} : il existe $c_n \in]a; c_{n-1}[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.
 $c = c_n$ résout le problème.

Exercice 26 : [énoncé]

Puisque $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que

$$f(a) > f(0) + 1 \text{ et } f(b) > f(0) + 1.$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et 0, d'une part, et 0 et b d'autre part, il existe $\alpha \in]a; 0[$ et $\beta \in]0; b[$ tels que $f(\alpha) = f(0) + 1 = f(\beta)$.

En appliquant le théorème de Rolle entre α et β , il existe $c \in]\alpha; \beta[\subset \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 27 : [énoncé]

Si f est constante, la propriété est immédiate.

Sinon, il existe $x_0 \in]0; +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$.

Posons $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$ qui est une valeur intermédiaire à $f(0)$ et $f(x_0)$.
 Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0; x_0[$ tel que $f(a) = y$.
 Puisque $\lim_{+\infty} f = f(0)$, y est une valeur intermédiaire à $f(x_0)$ et une valeur $f(x_1)$ avec x_1 suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in]x_0; x_1]$ tel que $f(b) = y$.
 En appliquant le théorème de Rolle sur $[a; b]$, on peut alors conclure.

Exercice 28 : [énoncé]

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.
 Puisque $f'(a) < 0$, il existe $b \in]0; a[$ tel que $f(b) > f(a)$.
 En appliquant le théorème de valeurs intermédiaires entre 0 et b , il existe $\alpha \in]0; b[$ tel que $f(\alpha) = f(a)$.
 En appliquant le théorème de Rolle entre α et a , on obtient $c \in]\alpha; a[\subset]0; a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 29 : [énoncé]

- (a) La fonction $g: x \mapsto f(x)/x$ est définie, continue et dérivable sur $]0; a]$.
 Quand $x \rightarrow 0$,

$$g(x) \rightarrow f'(0) = 0.$$

Prolongeons g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
 Puisque g est continue sur $[0; a]$, dérivable sur $]0; a[$ et puisque $g(0) = g(a)$, le théorème de Rolle assure l'annulation de la dérivée de g en un point $c \in]0; a[$.

- (b)

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

donc $g'(c) = 0$ donne $cf'(c) = f(c)$.

La tangente à f en c a pour équation :

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x.$$

Elle passe par l'origine.

Exercice 30 : [énoncé]

Puisque $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, il existe $x_1 \in]a; b[$ tel que $f(x_1) > 0$.
 En effet, si pour tout $x_1 \in]a; b[$, $f(x_1) \leq 0$ alors quand $h \rightarrow 0^+$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$ et donc $f'(a) \leq 0$.
 De même, puisque $f(b) = 0$ et $f'(b) > 0$, il existe $x_2 \in]a; b[$ tel que $f(x_2) < 0$.

Puisque f prend une valeur positive et une valeur négative dans $]a; b[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'y annule.
 Ainsi il existe $c_2 \in]a; b[$ tel que $f(c_2) = 0$.
 En appliquant le théorème de Rolle sur $[a; c_2]$ et $[c_2; b]$, on obtient c_1 et c_3 .

Exercice 31 : [énoncé]

Introduisons $\varphi: x \mapsto (f(x) - f'(x))e^x$.
 La fonction φ est définie et continue sur $[a; b]$, φ est dérivable sur $]a; b[$ et $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$.
 Par le théorème de Rolle, on peut affirmer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\varphi'(c) = 0.$$

Or

$$\varphi'(x) = (f(x) - f''(x))e^x$$

donc $\varphi'(c) = 0$ donne

$$f(c) = f''(c).$$

Exercice 32 : [énoncé]

(\Leftarrow) En vertu de l'inégalité des accroissements finis.

(\Rightarrow) Si f est k lipschitzienne alors $\forall x, y \in I$ tels que $x \neq y$ on a $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq k$.

À la limite quand $y \rightarrow x$ on obtient $|f'(x)| \leq k$. Par suite f' est bornée.

Exercice 33 : [énoncé]

La fonction φ proposée est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $[a; a+h]$.

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre a et $a+h$, il existe $b \in]a; a+h[$ tel que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(b) = h(f'(b+h) - f'(b)).$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à f' entre b et $b+h$, il existe $c \in]b; b+h[\subset]a; a+2h[$ tel que

$$f'(b+h) - f'(b) = hf''(c) \text{ puis } f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice 34 : [énoncé]

Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto xe^{1/x}$ entre x et $x+1$:

il existe $c_x \in]x; x+1[$ tel que

$$(x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x} = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}}(x+1-x) = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $c_x \rightarrow +\infty$ car $c_x \geq x$.

Par suite

$$\left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}} \rightarrow 1$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}) = 1.$$

Exercice 35 : [énoncé]

En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/c}$ entre n et $n+1$, on obtient

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1 - \ln c}{c^2} c^{1/c}$$

avec $c \in]n; n+1[$.

Puisque $c \sim n \rightarrow +\infty$, $\ln c \sim \ln n$ et puisque $c^{1/c} \rightarrow 1$

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

On applique le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln x$ entre x et $x+1$.

Il existe $c \in]x; x+1[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{c}.$$

Or $x < c < x+1$ donne

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

puis l'encadrement voulu.

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln p \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \ln p - \ln(p-1)$$

donne

$$\ln \frac{kn+1}{n+1} \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \ln k.$$

Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \ln k.$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a) Posons $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f''(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) de terme général

$$x_n = n \frac{\varepsilon}{M}$$

diverge vers $+\infty$ et donc

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \rightarrow 0.$$

Par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]x_n; x_{n+1}[$ tel que

$$|f'(c_n)|(x_{n+1} - x_n) \leq \frac{\varepsilon^2}{M}$$

ce qui donne

$$|f'(c_n)| \leq \varepsilon.$$

Puisque f'' est bornée par M , la fonction f' est M -lipschitzienne et donc

$$\forall u \in [x_n; x_{n+1}], |f'(u) - f'(c_n)| \leq M |u - c_n| \leq \varepsilon$$

puis

$$\forall u \in [x_n; x_{n+1}], |f'(u)| \leq \varepsilon + |f'(c_n)| \leq 2\varepsilon$$

et, puisque ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $A = x_N$,

$$\forall u \geq A, |f'(u)| \leq 2\varepsilon.$$

On peut conclure que f' converge vers 0 en $+\infty$.

(b) Posons

$$f(t) = \frac{\cos(t^2)}{t+1}.$$

On vérifie aisément que f est de classe \mathcal{C}^2 et converge en $+\infty$ sans que f' converge en 0.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Soit $f: x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Le tableau des variations de f est alors

x	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

On en déduit que f est positive.

Soit $g: x \mapsto \ln(1+x) - x/(1+x)$ définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Le tableau des variations de g est alors

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

On en déduit que g est positive.

(b) Soit $f: x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$ définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ .

$$f'''(x) = e^x \geq 0.$$

On obtient les variations suivantes

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0 \nearrow	$+\infty$
$f'(x)$	0 \nearrow	$+\infty$
$f(x)$	0 \nearrow	$+\infty$

On en déduit que f est positive.

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Étudions la fonction $\delta: t \mapsto 1 + t^p - (1+t)^p$ définie continue sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

On a $\delta(0) = 0$ et pour $t > 0$,

$$\delta'(t) = p(t^{p-1} - (1+t)^{p-1}).$$

Puisque $p-1 \leq 0$, $t^{p-1} \geq (1+t)^{p-1}$ et donc $\delta'(t) \geq 0$. On en déduit que pour tout $t \geq 0$, $\delta(t) \geq 0$ puis l'inégalité demandée.

(b) Pour $x = 0$, l'inégalité est immédiate et pour $x > 0$,

$$(x+y)^p = x^p \left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \leq x^p \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = x^p + y^p.$$

Exercice 40 : [énoncé]

f' est continue sur le segment $[a; b]$ elle y est donc bornée par un certain M . Par l'inégalité des accroissements finis, f est M lipschitzienne.

Exercice 41 : [énoncé]

La dérivée de f est continue et périodique donc bornée par son max sur une période (qui existe par continuité sur un segment). Par l'inégalité des accroissements finis, il en découle que f est lipschitzienne.

Exercice 42 : [énoncé]

f est continue sur \mathbb{R}_+ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x \ln x + x$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $f'(x) \rightarrow 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

De plus, f' est continue en 0 et finalement f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 43 : [énoncé]

Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, la fonction considérée est continue.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

f_{n+1} est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* .

Pour $x \neq 0$, $f'_{n+1}(x) = (n+2)f_n(x)$.

Quand $x \rightarrow 0$, $f'_{n+1}(x) \rightarrow 0 = (n+2)f_n(0)$ donc f_{n+1} est dérivable en 0 et $f'_{n+1}(0) = 0$.

Ainsi f_{n+1} est dérivable sur \mathbb{R} et $f'_{n+1} = (n+2)f_n$.

Par hypothèse de récurrence, f_n est de classe \mathcal{C}^n et donc f_{n+1} est de classe \mathcal{C}^{n+1} .

Récurrence établie.

Exercice 44 : [\[énoncé\]](#)

Posons $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\sqrt{t}).$$

Par composition g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x > 0, g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

g est continue et

$$g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t}) - f'(0)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{f''(0)}{2}$$

donc g est dérivable et g' est continue en 0.

Ainsi g est de classe \mathcal{C}^1 .