Intégration sur un segment

Continuité uniforme

Exercice 1 [01818] [Correction]
Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 [01819] [Correction]
Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 [01820] [Correction]
Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0\,;1]$.

Exercice 4 [03034] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 5 [03153] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue vérifiant

$$\forall x > 0, f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Exercice 6 [02642] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier.
Montrer qu'il existe une subdivision σ du segment $[a\,;b]$ adaptée à f telle que toute autre subdivision adaptée à f soit plus fine que σ.

Exercice 7 [00246] [Correction]
La fonction $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0\,;1]$?

Calcul d'intégrales

Exercice 8 [01964] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ (b) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ (c) $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$

Exercice 9 [00284] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$ (b) $\int_1^2 \ln t \,\mathrm{d}t$ (c) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$

Exercice 10 [00285] [Correction]
Calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x) \,\mathrm{d}x.$$

Calcul de primitives

Exercice 11 [01960] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int t\mathrm{e}^{t^2} \,\mathrm{d}t$ (b) $\int \frac{\ln t}{t} \,\mathrm{d}t$ (c) $\int \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$

Exercice 12 [00279] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int \cos t \sin t \,\mathrm{d}t$ (b) $\int \tan t \,\mathrm{d}t$ (c) $\int \cos^3 t \,\mathrm{d}t$

Exercice 13 [00280] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int \frac{t^2}{1+t^3} \,\mathrm{d}t$ (b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$ (c) $\int \frac{t}{1+t^4} \,\mathrm{d}t$

Exercice 14 [01962] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{i}t+1}$ (b) $\int \mathrm{e}^t \cos t \,\mathrm{d}t$ (c) $\int t \sin t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$

Intégration par parties

Exercice 15 [01979] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int t \ln t \,\mathrm{d}t$ (b) $\int t \arctan t \,\mathrm{d}t$ (c) $\int t \sin^3 t \,\mathrm{d}t$

Exercice 16 [00263] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\int (t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ (b) $\int (t-1) \sin t \,\mathrm{d}t$ (c) $\int (t+1) \operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t$

Exercice 17 [01980] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 \ln(1+t^2) \,\mathrm{d}t$ (b) $\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t \,\mathrm{d}t$(avec $n \in \mathbb{N}$) (c) $\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t$

Exercice 18 [00287] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 \arctan t \,\mathrm{d}t$ (b) $\int_0^{1/2} \arcsin t \,\mathrm{d}t$ (c) $\int_0^1 t \arctan t \,\mathrm{d}t$

Exercice 19 [00283] [Correction]
Calculer

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 20 [03089] [Correction]
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^2([a\,;b],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [a\,;b], \left|f'(x)\right| \geq \mu \text{ et } f' \text{ monotone.}$$

Montrer :

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)} \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\mu\pi}.$$

Changement de variable

Exercice 21 [01982] [Correction]
Déterminer les primitives suivantes en procédant par un changement de variable adéquat :

(a) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ (b) $\int \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ (c) $\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$

Exercice 22 [00290] [Correction]
Déterminer
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}.$$

Exercice 23 [01983] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

(a) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ (b) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}}$ (c) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$

Exercice 24 [00260] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ (b) $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ (c) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 25 [01985] [Correction]

(a) Montrer que
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

(b) En déduire
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}.$$

Exercice 26 [00188] [Correction]

(a) Soit $f \in \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$. Établir
$$\int_0^{\pi} tf(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la valeur de
$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 27 [03193] [Correction]
Pour a et b des réels tels que $ab>0$, on considère
$$I(a,b) = \int_a^b \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Calculer $I(-b,-a)$, $I(1/a,1/b)$ et $I(1/a,a)$ en fonction $I(a,b)$.

(b) Pour $a,b>1$, calculer $I(a,b)$ via changement de variables $v = x+1/x$ puis $v = 1/t$.

(c) Montrer que la relation ainsi obtenue est valable pour tout a,b tels que $ab>0$.

Exercice 28 [00282] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable ad hoc :

(a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$

(c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 29 [02436] [Correction]
Calculer
$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Intégrales fonctions des bornes

Exercice 30 [01987] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

(a) $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ (b) $g(x) = \int_0^x x f(t)\,\mathrm{d}t$ (c) $g(x) = \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$

Exercice 31 [01988] [Correction]
Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
(b) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
(c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 32 [01990] [Correction]
Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
(c) Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 33 [01991] [Correction]
Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale
(c) Montrer que F est dérivable en 0 et observer $F'(0) = 0$.

Exercice 34 [00088] [Correction]
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f.

Exercice 35 [00276] [Correction]
Pour $x \in \left]0\,;1\right[$, on pose

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

(a) Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
(b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 36 [02444] [Correction]
Soit

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

(a) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
(c) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 37 [03788] [Correction]
(a) Montrer que la fonction

$$f\colon x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 38 [00275] [Correction]
Soit
$$f\colon x\in\mathbb{R}^*\mapsto\int_x^{2x}\frac{\operatorname{ch}t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Étudier la parité de f. On étudie désormais f sur $]0\,;+\infty[$.
(b) Prolonger f par continuité en 0.
(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
(d) Branches infinies, allure.

Exercice 39 [00277] [Correction]
Soient $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par
$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Prolonger g par continuité en 0.
(b) Montrer que la fonction ainsi obtenue est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40 [03789] [Correction]
Étude et graphe de la fonction
$$x\mapsto\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$
On préciser le comportement de la fonction quand $x\to0$ et quand $x\to\pm\infty$.

Exercice 41 [02617] [Correction]
Pour tout $x\in[1\,;+\infty[$, on pose
$$F(x)=\int_1^x\frac{t}{\sqrt{t^3-1}}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que la fonction F est bien définie, continue sur $[1\,;+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$.
Exprimer sa dérivée $F'(x)$
(b) Étudier la dérivabilité de F en 1. Préciser la tangente au graphe de F en 1.
(c) Étudier la limite de F en $+\infty$.
(d) Justifier que F réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle à préciser.
(e) Justifier que F^{-1} est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et solution de l'équation différentielle
$$yy'=\sqrt{y^3-1}.$$
(f) Étudier la dérivabilité de F^{-1} en 0.

Sommes de Riemann

Exercice 42 [01998] [Correction]
Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

(a) $\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}$ (b) $\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k^2}$ (c) $\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

Exercice 43 [01999] [Correction]
En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de
$$S_n=\sum_{k=1}^n\sqrt{k}.$$

Exercice 44 [00744] [Correction]
Déterminer la limite de la suite de terme général
$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 45 [02785] [Correction]
Étudier les limites de $\left(\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 46 [02786] [Correction]
Calculer les limites de
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}$$
lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 47 [02787] [Correction]
Si $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, soit $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$.
Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Exercice 48 [03198] [Correction]
Déterminer un équivalent quand $n\to+\infty$ de
$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3}.$$

Exercice 49 [03768] [Correction]
Étudier la suite suivante
$$u_n=\frac{r(1)+r(2)+\dots+r(n)}{n^2}$$
avec $r(k)$ le reste de la division euclidienne de n par k.
Indice : étudier la suite suivante
$$v_n=\frac{(n-r(1))+(n-r(2))+\dots+(n-r(n))}{n^2}.$$

Exercice 50 [03428] [Correction]
(a) Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}.$$
(b) Pour $\alpha>1$, déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^\alpha}.$$
(c) En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right).$$

Formules de Taylor

Exercice 51 [02816] [Correction]
Énoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégrale.

Exercice 52 [02001] [Correction]
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$
$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\le\frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}.$$
En déduire
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 53 [02002] [Correction]
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln 2.$$

Exercice 54 [00295] [Correction]
En exploitant une formule de Taylor adéquate établir
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2.$$

Exercice 55 [02003] [Correction]
Soient $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a\in\mathbb{R}$.
Déterminer
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 56 [00297] [Correction]
Soient $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2) - nf(0).$$

Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 57 [02817] [Correction]
(a) Montrer, pour tout $x \in \left]0\,;\pi/2\right[$, l'existence de $\theta_x \in \left]0\,;1\right[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta_x).$$

(b) Étudier la limite de θ_x quand x tend vers 0 par valeur supérieure.

Exercice 58 [00255] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n).$$

(a) Montrer que

$$\forall 0 \le p \le n, \varphi^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^{n-p}).$$

(b) On introduit $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall 0 \le p < n, \psi^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^{n-p-1}).$$

En déduire que ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

(d) Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que

$$f(0) = 0, g(x) = 0 \iff x = 0 \text{ et } g'(0) \neq 0.$$

Montrer que f/g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 59 [01965] [Correction]
Soient $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $c \in \left]a\,;b\right[$.
Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t, \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 60 [01967] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t \text{ si, et seulement si, } f \ge 0 \text{ ou } f \le 0.$$

Exercice 61 [01767] [Correction]
f étant continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$$

Exercice 62 [03051] [Correction]
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b], \mathbb{C})$.
À quelle condition portant sur f a-t-on

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|\,?.$$

Exercice 63 [01968] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 64 [03092] [Correction]
(Seconde formule de la moyenne) Soient $f, g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}.$$

Montrer que

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) On introduit G la primitive de g s'annulant en a.
Montrer que

$$f(a)\min_{[a;b]} G \le S_n \le f(a)\max_{[a;b]} G.$$

(c) En déduire qu'il existe $c \in [a\,;b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(d) Soient $f, g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continues avec f monotone.
Montrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 65 [03188] [Correction]
Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I = [a\,;b]$.
Soit g une fonction continue sur I. On définit $G\colon I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$G([a\,;b]) = [m\,;M].$$

(b) Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 66 [01971] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;\pi] \to \mathbb{R}$ continue.

(a) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = 0$$

alors il existe $a \in \left]0\,;\pi\right[$ tel que f s'annule en a.

(b) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

alors f s'annule 2 fois sur $\left]0\,;\pi\right[$.
On pourra regarder $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 67 [01974] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

est lipschitzienne.

Exercice 68 [02966] [Correction]
Soient $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

m le minimum de f et M son maximum.
Prouver

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \le -mM.$$

Exercice 69 [05034] [Correction]
Soient $f, g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$g(c)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 70 [05032] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour toute fonction $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue et s'annulant en a et b.
Montrer que f est la fonction nulle.

Limites d'intégrales

Exercice 71 [01978] [Correction]
Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

(a) $\lim_{x\to 0^+}\int_{-x}^{x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$
(b) $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
(c) $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 72 [00286] [Correction]
Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

(a) $\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{t}$
(b) $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$
(c) $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 73 [01977] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Utilisation de primitives

Exercice 74 [03380] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer qu'il existe $x \in\,]0\,;1[$ vérifiant

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 75 [01973] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Inégalité et intégrales

Exercice 76 [05033] [Correction]
Soient $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante et $g\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue prenant ses valeurs dans $[0\,;1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \lambda = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Que devient cette inégalité lorsque f est croissante ?

Suites dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 77 [01994] [Correction]
Pour p et q entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

(a) Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

(b) Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factoriels.

Exercice 78 [01997] [Correction]
(Intégrales de Wallis) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(c) Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.

(d) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n.$$

(e) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 79 [01992] [Correction]
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.

(b) Montrer que

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$

(c) En déduire que

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 80 [01993] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x.$$

(a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.

(c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

(d) Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n).

(e) Soit (u_n) une suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n.$$

On suppose que $a \ne I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

Exercice 81 [01996] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}.$$

(a) Calculer u_0, u_1, u_2.

(b) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.

(c) Montrer que $u_n \to 1$.

(d) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) \,\mathrm{d}x.$$

(e) Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) \,\mathrm{d}x = 0$$

et en déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 82 [00289] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t.$$

(a) Pour $n \ge 2$, former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.

(b) En déduire l'expression de I_n selon la parité du naturel n.

Exercice 83 [02981] [Correction]
Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Exercice 84 [00322] [Correction]
Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que $I_n \to 0$ en décroissant.

(b) Simplifier $I_n + I_{n+1}$ et en déduire une expression de I_n à l'aide d'un symbole sommatoire.

(c) Déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(d) Exploiter

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

pour déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 85 [01860] [Correction]

(a) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Justifier

$$0 \le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}.$$

(d) En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

Calcul de primitives de fonctions rationnelles

Exercice 86 [01233] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ (b) $\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Calcul de primitives ou d'intégrales se ramenant à une fonction rationnelle

Exercice 87 [01235] [Correction]
Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

(a) $\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$

(b) $\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}$

(c) $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$

Exercice 88 [01236] [Correction]
Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}.$$

Exercice 89 [01237] [Correction]
Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

(a) $\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$

(b) $\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$

(c) $\frac{1}{\cos^4 x}$

(d) $\frac{1}{\cos^3 x}$

Exercice 90 [01238] [Correction]
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}.$$

Exercice 91 [03774] [Correction]
En exploitant le changement de variable $u = \tan t$, calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3+\cos^2 t}.$$

Exercice 92 [01239] [Correction]
Calculer :

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ (b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x \cos x}$ (c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$

Exercice 93 [01241] [Correction]
Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

(a) $\frac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}$
(b) $\frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch}^2 x}$
(c) $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}$
(d) $\frac{1}{\operatorname{ch}^3 x}$

Exercice 94 [01242] [Correction]
Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}.$$

Exercice 95 [01243] [Correction]
Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

(a) $\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ (b) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (c) $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

Exercice 96 [01244] [Correction]
Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

(a) $\frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}$
(b) $\frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ $\sqrt{x-x^2+6}$
(c) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
(d) $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$
(e) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Exercice 97 [01245] [Correction]
Sur $]-1/2\,;+\infty[$, déterminer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Exercice 98 [01246] [Correction]
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+3)}$ (b) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x+4)}$ (c) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Pour $y \geq x \geq 0$,
$$(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2 = y+x-2\sqrt{xy} \leq y-x$$
donc
$$\sqrt{y}-\sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}.$$
Par symétrie
$$\forall x,y \geq 0, \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|y-x|}.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $\eta = \varepsilon^2 > 0$.
Pour tout $x,y \geq 0$,
$$|y-x| \leq \eta \implies \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|y-x|} \leq \sqrt{\eta} = \varepsilon.$$
La fonction racine carrée est donc uniformément continue.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'absurde supposons que $x \mapsto \ln x$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x,y > 0, |y-x| \leq \eta \implies |\ln y - \ln x| \leq \varepsilon.$$
Pour $y = x+\eta$,
$$|\ln y - \ln x| = \ln\left(\frac{x+\eta}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$
Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
f est continue sur le segment $[0\,;1]$, donc uniformément continue sur $[0\,;1]$ et donc *a fortiori* sur $]0\,;1]$.

Exercice 4 : [énoncé]
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x,y \in [0\,;1[, |y-x| \leq \alpha \implies \left|f(y)-f(x)\right| \leq 1.$$
Par suite, pour tout $x \in [1-\alpha\,;1[$, on a $\left|f(x)-f(1-\alpha)\right| \leq 1$ puis $\left|f(x)\right| \leq 1+\left|f(1-\alpha)\right|$.
De plus, la fonction f est continue donc bornée sur le segment $[0\,;1-\alpha]$ par un certain M.
On a alors f bornée sur $[0\,;1[$ par $\max\left\{M, 1+\left|f(1-\alpha)\right|\right\}$.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant
$$\forall x,y > 0, |y-x| \leq \alpha \implies \left|f(y)-f(x)\right| \leq \varepsilon.$$
Considérons alors la suite $\big(f(n\alpha)\big)$. Puisque celle-ci converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant
$$\forall n \geq N, \left|f(n\alpha)\right| \leq \varepsilon.$$
Posons $A = N\alpha$. Pour $x \geq A$, il existe $n \geq N$ vérifiant
$$|n\alpha - x| \leq \alpha$$
et donc
$$\left|f(x)\right| \leq \left|f(x)-f(n\alpha)\right| + \left|f(n\alpha)\right| \leq 2\varepsilon.$$
On peut alors conclure que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 6 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ adaptée à f.
A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément p.
Il existe une subdivision $\sigma = (a_0,\dots,a_p)$ adaptée à f.
Montrons que toute subdivision $\sigma' = (b_0,b_1,\dots,b_n)$ adaptée à f est plus fine que σ.
Par l'absurde : supposons $\exists i \in \{1,2,\dots,p-1\}$ tel que $a_i \notin \{b_0,b_1,\dots,b_n\}$.
On peut alors affirmer qu'il existe $j \in \{1,2,\dots,n\}$ tel que $a_i \in]b_{j-1}\,;b_j[$.
Comme σ et σ' sont adaptées à f on peut affirmer que f est constante sur $]a_{i-1}\,;a_i[,]a_i\,;a_{i+1}[$ et $]b_{j-1}\,;b_j[$ puis que f est constante sur $]a_{i-1}\,;a_{i+1}[$.
Par suite la subdivision $\sigma' = (a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_p)$ est adaptée à f or cela contredit la définition de p.

Exercice 7 : [énoncé]
Cette fonction n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue par morceaux.

Exercice 8 : [énoncé]
Dans chaque cas la détermination d'une primitive est (assez) immédiate

(a)
$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

(b)
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(c)
$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\arcsin t\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) En linéarisant
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

(b) On connaît une primitive du logarithme ou l'on intègre par parties
$$\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln t - t\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

(c) On reconnaît une forme $u'/\sqrt{u}$
$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

Exercice 10 : [énoncé]
La fonction $x\mapsto \ln(1+\tan x)$ est définie et continue sur $[0\,;\pi/4]$ donc I existe.
$\ln(1+\tan x) = \ln(\cos x+\sin x) - \ln(\cos x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Ainsi
$$I = \frac{\pi\ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$$
or
$$\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x \underset{t=\frac{\pi}{4}-x}{=} \int_0^{\pi/4}\ln\cos(t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$I = \frac{\pi\ln 2}{8}.$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) On reconnaît une forme $u'\mathrm{e}^u$
$$\int t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2} + C^{te}.$$

(b) On reconnaît une forme $u'u$
$$\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + C^{te}.$$

(c) On reconnaît une forme u'/u
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln|\ln t| + C^{te}.$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) C'est une forme $u'u$ donc
$$\int \cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2 t + C^{te}.$$

(b) C'est une forme u'/u donc
$$\int \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln|\cos t| + C^{te}.$$

(c) On se ramène à une forme $u'u^2$ via $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$
$$\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t = \int \cos t - \int \cos t\sin^2 t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C^{te}.$$

Exercice 13 : [énoncé]
Dans chaque cas on reconnaît une forme $u'f(u)$

(a) $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\left|1+t^3\right| + C^{te}$ sur $]-\infty\,;-1[$ ou $]-1\,;+\infty[$.

(b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+t^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan t^2 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : [énoncé]

(a) En isolant partie réelle et imaginaire

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{i}t+1} = \frac{1}{\mathrm{i}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\int \frac{t+\mathrm{i}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{i}t+1} = \arctan t - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln(t^2+1) + C^{te}.$$

(b) On observe

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)$$

et

$$\int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + C^{te}$$

donc

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\cos t + \sin t) + C^{te}.$$

(c) On observe

$$\int t\sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int t\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)$$

et par intégration par parties

$$\int t\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \frac{t+\mathrm{i}(1-t)}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + C^{te}$$

donc

$$\int t\sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(t\sin t + (1-t)\cos t) + C^{te}.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties

$$\int t\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\ln t - \int \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + C^{te}.$$

(b) Par intégration par parties

$$\int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

puis en écrivant

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

on obtient

$$\int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left((t^2+1)\arctan t - t\right) + C^{te}.$$

(c) En écrivant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$$\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \int t\sin t\,\mathrm{d}t - \int t\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\int t\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t - t\cos t + C^{te}.$$

D'autre part, par intégration par parties

$$\int t\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int \cos^3\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t - \int \cos t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t.$$

Finalement

$$\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sin t - t\cos t + \frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{9}\sin^3 t + C^{te}.$$

Exercice 16 : [énoncé]
Par intégration par parties

(a) $\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(t^2+t+2)\mathrm{e}^{-t} + C^{te}$.

(b) $\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t + (1-t)\cos t + C^{te}$.

(c) $\int (t+1)\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t = (t+1)\,\mathrm{sh}\,t - \mathrm{ch}\,t + C^{te}$.

Exercice 17 : [énoncé]
Par intégration par parties
(a)
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
En écrivant
$$\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}$$
on obtient
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2\,\Big[t - \arctan t\Big]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$
(b) Par intégration par parties
$$\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} t^n\,\mathrm{d}t = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}.$$
(c) Par deux intégrations par parties
$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\sin(\ln t)\Big]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t = -\Big[t\cos(\ln t)\Big]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,\Big[t\cos(\ln t)\Big]_1^{\mathrm{e}^\pi} = \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
Par intégration par parties
(a)
$$\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t = \Big[t\arctan t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$
(b)
$$\int_0^{1/2} \arcsin t\,\mathrm{d}t = \Big[t\arcsin t\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \Big[\sqrt{1-t^2}\Big]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$
(c)
$$\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\Big[t^2\arctan t\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\,\Big[t - \arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 19 : [énoncé]
Par intégration par parties
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Exercice 20 : [énoncé]
Écrivons
$$\int_a^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t.$$
Par intégration par parties
$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}}{2\mathrm{i}\pi f'(t)}\right]_a^b + \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t.$$
Quitte à considérer $-f$, supposons $f'' \geq 0$
$$\left|\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \frac{f''(t)}{f'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}$$
et donc
$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}\right).$$
Selon le signe (constant) de f', le terme en $f'(b)$ ou le terme en $f'(a)$ se simplifie et on obtient
$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\mu\pi}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a)
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u+u^3} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\arctan u + C^{te} = 2\arctan\sqrt{t} + C^{te}.$$

(b)
$$\int \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int \frac{u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^u u^2} = \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln(1+u^2)+C^{te} = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 t)+C^{te}.$$

(c)
$$\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{u+1} = \int 1-\frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = u-\ln(1+u)+C^{te} = \mathrm{e}^t-\ln(1+\mathrm{e}^t)+C^{te}.$$

Exercice 22 : [énoncé]
Par le changement de variable $u=\sqrt{t^2-1}$
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan(\sqrt{t^2-1})+C^{te}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a)
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(b)
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

(c)
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\ln u-\ln(u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \ln 2-\ln(\mathrm{e}+1)+1.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a)
$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}.$$

(b)
$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{16}.$$

(c)
$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln u^2\,\mathrm{d}u = 4\left[u\ln u-u\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ln 2-4\sqrt{2}+4.$$

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Par le changement de variable $x=\frac{\pi}{2}-t$ on a
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$
donc
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Via le changement de variable $t=\sin x$ (avec $x\in[0\,;\pi/2]$)
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Par le changement de variable $u=\pi-t$, on obtient
$$I = \int_0^{\pi} tf(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\pi-u)f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$
et donc
$$2I = \int_0^{\pi} tf(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (\pi-u)f(\sin u)\,\mathrm{d}u = \pi\int_0^{\pi} f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$
puis l'identité proposée.

(b) En observant $\cos^{2n} x = (1-\sin^2 x)^n$, on peut appliquer la relation précédente

$$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

En coupant l'intégrale en $\pi/2$

$$I_n = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right).$$

En procédant au changement de variable $y = \pi - x$ dans la seconde intégrale

$$I_n = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, en procédant au changement de variable $y = \pi/2 - x$, on observe

$$I_n = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

et on en déduit

$$2I_n = \pi\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Finalement

$$I_n = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Par parité de la fonction intégrée, on a

$$I(-b,-a) = I(a,b).$$

Par le changement de variable $u = 1/t$, on obtient

$$I(1/a,1/b) = \int_a^b \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}}\frac{-\mathrm{d}t}{t^2} = I(a,b).$$

En particulier

$$I(1/a,a) = I(a,1/a)$$

alors que par échange des bornes

$$I(1/a,a) = -I(a,1/a).$$

On en déduit

$$I(1/a,a) = 0.$$

(b) En procédant aux changements de variable proposés

$$I(a,b) = \int_{a+1/a}^{b+1/b} \frac{-\mathrm{d}v}{v\sqrt{v^2-2}} = \int_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t^2}}$$

et donc

$$I(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin\sqrt{2}t\right]_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)}.$$

(c) Le changement de variable $v = x + 1/x$ n'est pas bijectif quand x parcourt $]0\,;+\infty[$ mais dans les calculs précédents, il était possible de l'exploiter sans exprimer x en fonction de v. L'hypothèse $a,b > 1$ n'a donc pas été utilisée dans l'étude qui précède et donc le résultat proposé se généralise immédiatement.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Via $x = \cos t$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(b) Via $x = \sqrt{t}$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+2x} = \left[\ln(1+2x)\right]_1^{\sqrt{2}} = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3.$$

(c) Via $x = 1/t$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1/2} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_{3/2}^{2} \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}.$$

Exercice 29 : [énoncé]

La fonction intégrée est bien définie et continue car $\frac{2t}{1+t^2} \in [-1\,;1]$.

On simplifie l'expression de la fonction intégrée.

Par parties, on intègre le facteur 1 multipliant l'arc sinus[1].

1. On peut aussi réaliser le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ afin d'exploiter $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

On pose

$$u(t)=t\quad\text{et}\quad v(t)=\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u'(t)=1$ et, par dérivation de fonctions composées,

$$v'(t)=\frac{2\left(1+t^2\right)-4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}}=\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{\left|1-t^2\right|}.$$

Afin de poursuivre le calcul, il faut résoudre la valeur absolue : on découpe l'intégrale en $t=1$ et l'on calcule séparément les deux intégrales.

D'une part,

$$\int_0^1\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\left[t\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\arcsin(1)-\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$$

D'autre part,

$$\int_1^{\sqrt3}\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\left[t\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\right]_1^{\sqrt3}+\int_1^{\sqrt3}\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\arcsin\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)-\arcsin(1)+\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_1^{\sqrt3}$$
$$=\sqrt3\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\ln 2.$$

Finalement, en sommant ces deux calculs

$$\int_0^{\sqrt3}\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt3}.$$

Exercice 30 : [énoncé]
On introduit F primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(a) $g(x)=F(x^2)-F(2x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x)=2xf(x^2)-2f(2x)$.

(b) $g(x)=x(F(x)-F(0))$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)$.

(c) $g(x)\underset{u=t+x}{=}\int_x^{2x}f(u)\,\mathrm{d}u=F(2x)-F(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x)=2f(2x)-f(x)$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ existe.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,-x\in\mathbb{R}^*\text{ et }f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{\operatorname{sh}t}{t}\,\mathrm{d}t\underset{u=-t}{=}-\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sh}u}{u}\,\mathrm{d}u=-f(x).$$

Ainsi f est impaire.

(b) φ est continue donc possède une primitive F. Comme $f(x)=F(2x)-F(x)$ f est dérivable et

$$f'(x)=\frac{\operatorname{sh}2x-\operatorname{sh}x}{x}$$

pour $x\in\mathbb{R}^*$ et $f'(0)=1$.

(c) Pour tout $x\geq 0$, on a $\operatorname{sh}2x\geq\operatorname{sh}x$ donc $f'(x)\geq 0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque

$$f(x)\geq\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sh}x}{t}\,\mathrm{d}t=\operatorname{sh}x\ln 2$$

on a $f(x)\to+\infty$ quand $x\to+\infty$.
On complète le tableau de variation par parité.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) En développant

$$f(x)=\int_0^x(\sin x\cos t-\cos x\sin t)g(t)\,\mathrm{d}t=\sin x\int_0^x\cos t g(t)\,\mathrm{d}t-\cos x\int_0^x\sin t g(t)\,\mathrm{d}t$$

f est donc dérivable et

$$f'(x)=\cos x\int_0^x\cos t g(t)\,\mathrm{d}t+\sin x\int_0^x\sin t g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) f' est dérivable et

$$f''(x)=-\sin x\int_0^x\cos t g(t)\,\mathrm{d}t+\cos x\int_0^x\sin t g(t)\,\mathrm{d}t+g(x)=-\int_0^x\sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t+g($$

donc $f''(x)+f(x)=g(x)$.

(c) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Solution homogène $y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$.
Solution particulière $y(x)=f(x)$.
Solution générale

$$y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\int_0^x\sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Soit $\tilde{f}$ une primitive de f.

$$F(x) = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{2x} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{2x} + \frac{\tilde{f}(0) - \tilde{f}(-x)}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} \tilde{f}'(0) = f(0).$$

On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = f(0)$.

(b) F est dérivable par opérations et

$$F'(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2x} - \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tf(t)\Big]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

et on peut donc simplifier

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^{x} tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) Sachant

$$\int_{-x}^{x} tf'(0)\,\mathrm{d}t = 0$$

on peut écrire

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^{x} t\big(f'(t) - f'(0)\big)\,\mathrm{d}t.$$

En posant

$$M_x = \sup_{t \in [-x;x]} \left|f'(t) - f'(0)\right|$$

on a alors

$$\left|F'(x)\right| \le \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^{x} tM_x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} M_x.$$

Or f' est continue en 0, donc $M_x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ puis

$$F'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

En vertu du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Exercice 34 : [énoncé]

Puisque continue, la fonction f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = F(2y + x) - F(2x + y).$$

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient

$$f \colon x \mapsto f(y) + F(2y + x) - F(2x + y).$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = f(2y + x) - 2f(2x + y).$$

En dérivant cette relation en la variable y, on obtient

$$0 = 2f'(2y + x) - 2f'(2x + y)$$

et donc

$$f'(2y + x) = f'(2x + y).$$

Puisque pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ x + 2y = t \end{cases}$$

on peut affirmer que la fonction f' est constante.
On en déduit que la fonction f est affine.
Par le calcul, on vérifie que, parmi les fonctions affines, seule la fonction nulle vérifie la relation proposée.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \left]0\,;1\right[$, $[x\,;x^2] \subset \left]0\,;1\right[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $\left]0\,;1\right[$ donc $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ existe.
Pour $t \in [x^2\,;x]$,

$$\frac{1}{\ln x} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{1}{\ln x^2}$$

donc

$$\frac{x^2 - x}{\ln x^2} \le \varphi(x) \le \frac{x^2 - x}{\ln x}.$$

Quand $x \to 0^+$, $\varphi(x) \to 0$.
On a aussi

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

donc

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \varphi(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

or

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln(\ln t)\Big]_x^{x^2} = \ln 2.$$

Quand $x \to 1^-$, $\varphi(x) \to \ln 2$.
Finalement φ peut être prolongée par continuité en 0 et en 1.

(b) Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ sur $]0\,;1[$.
On a $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ ce qui permet de dériver φ et d'obtenir

$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ est définie car on vérifie aisément que la fonction intégrée peut être prolongée par continuité en 0 et en 1 et on a

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie sur $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour $x \in\,]0\,;1[$, on a pour tout $t \in [x^2\,;x]$, $2\ln x \leq \ln t \leq \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}$$

et donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer
$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2, on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2$.

(b) On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ avec $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Cette dérivée étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$. On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec $f'(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f'(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$. Le calcul de $f''(x)$ permet de justifier que f'' n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

(c) f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$, elle y admet donc une primitive F.
Pour $x > 0$, on a $[x\,;2x] \subset\,]0\,;+\infty[$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ existe et

$$f(x) = F(2x) - F(x).$$

Puisque la fonction F est dérivable, la fonction f l'est aussi et

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}.$$

L'étude pour $x < 0$ est similaire en considérant $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ définie et continue sur $]-\infty\,;0[\, \supset [2x\,;x]$.

(b) Pour $x > 0$,

$$\forall t \in [x\,;2x], \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}^{2x}$$

donc

$$\mathrm{e}^x \ln 2 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{2x}\ln 2$$

puis

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln 2.$$

L'étude est analogue en 0^-

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Par le changement de variable $u = -t$, on obtient que f est paire.

(b) Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall t \in [x\,;2x], \frac{\operatorname{ch} x}{t} \leq \frac{\operatorname{ch} t}{t} \leq \frac{\operatorname{ch} 2x}{t}.$$

En intégrant, on obtient

$$\operatorname{ch} x. \ln 2 \leq f(x) \leq \operatorname{ch} 2x. \ln 2$$

et on en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2.$$

(c) La fonction $t \mapsto \operatorname{ch} t/t$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc y admet une primitive G et puisque $f(x) = G(2x) - G(x)$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} x}{x}.$$

De plus

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

donc, par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$,f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Puisque $f(x) \geq \operatorname{ch} x. \ln 2$, f présente une branche parabolique verticale.

Exercice 39 : [énoncé]

(a) On a

$$g(x) - f(0) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t) - f(0)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$|x| \leq \alpha \implies \left|f(x) - f(0)\right| \leq \varepsilon.$$

Par suite, si $|x| \leq \alpha$, pour tout t compris entre 0 et x, $\left|f(t) - f(0)\right| \leq \varepsilon$ puis par intégration, $\left|g(x) - f(0)\right| \leq \varepsilon$. Ainsi $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$. On pose $g(0) = f(0)$.

(b) Par opération, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(x)}{x}.$$

Procédons à une intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

De façon semblable à ce qui précède, on obtient

$$g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}f'(0).$$

Ainsi la fonction continue g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(0) = \frac{1}{2}f'(0).$$

Exercice 40 : [énoncé]

Posons

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

On a

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}} - \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

ce qui assure que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $t = -u$ assure que F est impaire.
Par dérivation de primitive

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+(2x)^2+(2x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}.$$

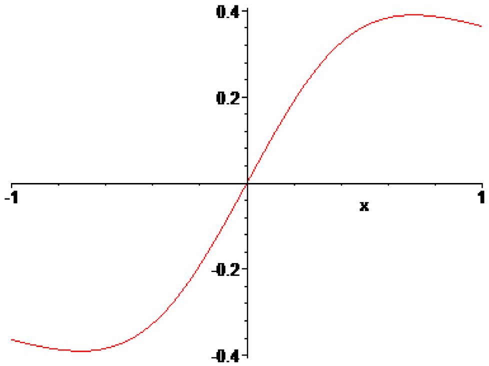
En réduisant au même dénominateur et en multipliant par la quantité conjuguée, $F'(x)$ est du signe de

$$4(1+x^2+x^4) - \left(1+(2x)^2+(2x)^4\right) = 3(1-4x^4)$$

F est donc croissante que $[0\,;1/\sqrt{2}]$ puis décroissante sur $[1/\sqrt{2}\,;+\infty[$
En 0, le graphe de la fonction passe par l'origine avec une tangente d'équation $y = x$.
Quand $x \to +\infty$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \to 0$$

et donc F tend vers 0 en $+\infty$.



Exercice 41 : [énoncé]

(a)

$$f: t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2+t+1)}}$$

est définie et continue sur $]1\,;x]$ et

$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$

donc $F(x)$ existe.
F est primitive de la fonction continue f sur $]1\,;+\infty[$ donc F est $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = f(x)$.
Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, F est finalement $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]1\,;+\infty[$

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}.$$

(b) F est continue en 1 et $F'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$. Tangente verticale en 1.

(c) $\sqrt{t^3-1} \le t^{3/2}$ donc

$$F(x) \ge \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc $F(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

(d) F est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ donc F réalise une bijective de $[1\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$.
F réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$ avec $F'(x) \ne 0$ donc F^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

donc F^{-1} est solution de l'équation différentielle considérée.

(e) F^{-1} est continue en 0 et $F^{-1}(0) = 1$. En vertu de la relation

$$(F^{-1})' = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$(F^{-1})'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

F^{-1} est donc dérivable en 0 et $(F^{-1})'(0) = 0$.

Exercice 42 : [énoncé]

(a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(b)

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k/n}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2.$$

(c)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+2k/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}} = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1.$$

Exercice 43 : [énoncé]
On peut écrire

$$S_n = n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}\right)$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f\colon t\mapsto\sqrt{t}$ définie et continue sur $[0\,;1]$.
Par somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

donc

$$S_n\sim\frac{2}{3}n^{3/2}.$$

Exercice 44 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k)-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

La fonction $x\to\ln(1+x)$ étant continue sur $[0\,;1]$, on obtient

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$$

On en déduit

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\to\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 45 : [énoncé]

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=2\ln 2-1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}\to\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, $\frac{k}{n^2}\le\frac{1}{n}$ donc

$$1\le\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\le 1+\frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\to 1.$$

Exercice 46 : [énoncé]
Pour $x\ge 0$, $x-\frac{1}{6}x^3\le\sin x\le x$ donc $|\sin x-x|\le Mx^3$ avec $M=1/6$.
On a alors

$$\left|\sin\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right|\le M.\frac{k^3}{n^6}\le\frac{M}{n^3}$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\right|\le\frac{M}{n^2}\to 0.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\to\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\to\sin 1-\cos 1.$$

Pour $x\ge 0$, $x-\frac{1}{6}x^3\le\sin x\le x$ donne aussi $\left|\sin^2 x-x^2\right|\le M'x^4$ avec $M'=1/3$.
Ainsi

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\right|\le M'\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+n)^2}\le\frac{M'}{n}\to 0.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}\to\ln 2.$$

Exercice 47 : [énoncé]
On a

$$f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\cos\frac{(n+1)x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

donc

$$x_n=\frac{\pi}{n+1}.$$

Par suite

$$f_n(x_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}}.$$

Or la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)/t$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0\,;1]$ donc par somme de Riemann

$$f_n(x_n) \to \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 48 : [énoncé]
On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+2k/n)^3} = \frac{1}{n^2}S_n$$

avec

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+2k/n)^3}.$$

Par les sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^3} = \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{9n^2}.$$

Exercice 49 : [énoncé]
La division euclidienne de n par k s'écrit

$$n = \lfloor n/k\rfloor k + r(k)$$

et donc

$$n - r(k) = k\lfloor n/k\rfloor$$

puis

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$$

ce qui fait penser à une somme de Riemann associée à la fonction $f\colon t \mapsto t\lfloor 1/t\rfloor$ définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$. Bien qu'elle soit prolongeable par continuité en 0, ce prolongement n'est pas continue par morceaux sur $[0\,;1]$ (il n'existe pas de subdivision finie du segment $[0\,;1]$ qui soit adaptée) et l'on ne peut donc pas employer directement le théorème du cours relatif aux sommes de Riemann : cela va nous obliger à un petit découpage...

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor n/N\rfloor}\frac{k}{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor + \frac{1}{n}\sum_{k=\lfloor n/N\rfloor+1}^{n}\frac{k}{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor.$$

D'une part

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor n/N\rfloor}\frac{k}{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor n/N\rfloor} 1 \le \frac{\lfloor n/N\rfloor}{n} \le \frac{1}{N}$$

et d'autre part, par les sommes de Riemann

$$\frac{1}{n-\lfloor n/N\rfloor}\sum_{k=\lfloor n/N\rfloor+1}^{n}\frac{k}{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{1/N}^1 t\lfloor 1/t\rfloor\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_{1/N}^1 t\lfloor 1/t\rfloor\,\mathrm{d}t = \int_1^N \frac{\lfloor u\rfloor}{u^3}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{N}\int_k^{k+1}\frac{k}{u^3}\,\mathrm{d}u$$

puis

$$\int_{1/N}^1 t\lfloor 1/t\rfloor\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{12}.$$

En choisissant N assez grand pour que $1/N \le \varepsilon$ et $\frac{1}{2}\sum_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \le \varepsilon$, on a

$$\left|v_n - \frac{\pi^2}{12}\right| \le \varepsilon + \frac{n-\lfloor n/N\rfloor}{n}\left(\frac{1}{n-\lfloor n/N\rfloor}\sum_{k=\lfloor n/N+1\rfloor}^{N}\frac{k}{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor - \frac{\pi^2}{12}\right) + \frac{\lfloor n/N\rfloor}{n}\frac{\pi^2}{12}.$$

Puis pour n assez grand

$$\left|v_n - \frac{\pi^2}{12}\right| \le \varepsilon + \frac{n-\lfloor n/N\rfloor}{n}\left(\sum_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \varepsilon\right) + \frac{\lfloor n/N\rfloor}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left|v_n - \frac{\pi^2}{12}\right| \le \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon\frac{\pi^2}{12}.$$

Finalement $v_n \to \pi^2/12$ puis $u_n \to 1 - \pi^2/12$

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2.$$

(b) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^\alpha}=n^{1-\alpha}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha}\to 0\times\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha}=0.$$

(c) Sachant pour $x>0$

$$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$$

on obtient

$$\left|\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right)-\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}\right|\le\frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^3}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}=\ln 2.$$

Exercice 51 : [énoncé]

C'est du cours !

Exercice 52 : [énoncé]

En appliquant la formule de Taylor reste intégrale à la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^x$ entre 0 et x on obtient :

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|.$$

Si $x\ge0$ alors

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|&=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\&\le\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}=\frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Si $x\le0$ alors

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|&=\int_x^0\frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\le\int_x^0\frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu appliquer directement l'inégalité de Taylor-Lagrange à la restriction de f sur $[-|x|\,;|x|]$.
Quand $n\to+\infty$,

$$\frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}\to0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x.$$

Exercice 53 : [énoncé]

La fonction $f\colon x\mapsto\ln(1+x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$f(0)=0$, $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ pour $k>0$ et $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le n!=M$ sur $\mathbb{R}_+$.
Par l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\le\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $x=1$, on obtient :

$$\left|\ln2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\le\frac{1}{n+1}\to0$$

donc
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln 2.$$

Exercice 54 : [énoncé]
Considérons la fonction $f\colon t\to\ln(1+t)$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0)=0$,
$$\forall k\geq 1, f^{(k)}(t)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$$
donc
$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$
Sur $[0\,;1]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leq n!$ donc l'inégalité de Taylor Lagrange donne
$$\left|f(1)-f(0)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|\leq\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$
i.e.
$$\left|\ln 2-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\right|\leq\frac{1}{n+1}\to 0$$
d'où
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\to\ln 2.$$

Exercice 55 : [énoncé]
En vertu du théorème de Taylor-Young :
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2f''(a)+\mathrm{o}(h^2)$$
donc
$$f(a+h)-2f(a)+f(a-h)=h^2f''(a)+\mathrm{o}(h^2)$$
puis
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a).$$

Exercice 56 : [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec $M=\max_{[0;1]}|f''|$:
$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)-\frac{k}{n^2}f'(0)\right|\leq\frac{M}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2.$$
Par suite
$$\left|S_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)\right|\leq\frac{M}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\leq\frac{M}{2n}\to 0$$
or
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)=\frac{n+1}{2n}f'(0)$$
donc
$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{f'(0)}{2}.$$

Exercice 57 : [énoncé]
Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :
$$\forall x\in\,]0\,;\pi/2[,\exists\xi\in\,]0\,;x[,\sin x=x-\frac{1}{6}x^3\cos(\xi).$$
Le réel $\theta_x=\xi/x$ convient alors
À défaut de connaître l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste-intégrale
$$\sin x=x-\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t.$$
Or pour $t\in[0\,;x]$, on a
$$\cos x\leq\cos t\leq 1$$
avec inégalité stricte pour $t\in\,]0\,;x[$ donc
$$\frac{x^3}{6}\cos x<\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t<\frac{x^3}{6}.$$
Ainsi
$$\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t=\lambda\frac{x^3}{6}\text{ avec }\cos x<\lambda<1=\cos 0.$$
Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire
$$\lambda=\cos(x\theta_x)\text{ avec }\theta_x\in\,]0\,;1[.$$

Quand $x \to 0$, $x\theta_x \to 0$ donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + \mathrm{o}(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

donc $\theta_x^2 \to 1/10$ puis

$$\theta_x \to \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Exercice 58 : [énoncé]

(a) Par la formule de Taylor Young :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \mathrm{o}(x^n)$$

$\varphi(x) = \mathrm{o}(x^n)$ entraîne alors $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.
En appliquant la formule de Taylor Young à $\varphi^{(p)}$, on obtient la conclusion.

(b) $x\psi(x) = \varphi(x) = \mathrm{o}(x^n)$ donc $\psi(x) = \mathrm{o}(x^{n-1})$.
$x\psi'(x) + \psi(x) = \varphi'(x) = \mathrm{o}(x^{n-1})$ donc $\psi'(x) = \mathrm{o}(x^{n-2})$
$x\psi''(x) + 2\psi'(x) = \varphi''(x) = \mathrm{o}(x^{n-2})$ donc $\psi''(x) = \mathrm{o}(x^{n-3})$...
Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

(c) On introduit

$$\varphi(x) = f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right).$$

On a $\varphi(x) = \mathrm{o}(x^n)$ donc ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ puis

$$g(x) = \psi(x) + \left(f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!}f^{(n)}(0)\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

(d)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{x}\frac{1}{g(x)/x}$$

avec $x \mapsto f(x)/x$ et $x \mapsto g(x)/x$ qui se prolongent en 0 en des fonctions de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Exercice 59 : [énoncé]

Supposons

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f \geq \frac{1}{b-c}\int_c^b f.$$

On a alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^c f + \frac{b-c}{c-a}\int_a^c f = \frac{b-a}{c-a}\int_a^c f.$$

Le cas

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f < \frac{1}{b-c}\int_c^b f$$

est semblable et on peut conclure.

Exercice 60 : [énoncé]

($\Longleftarrow$) ok
($\Longrightarrow$) Si $\int_a^b f \geq 0$ alors $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ donne $\int_a^b |f(t)| - f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or la fonction $|f| - f$ est continue et positive donc elle est nulle.
Le cas $\int_a^b f < 0$ est semblable.

Exercice 61 : [énoncé]

Montrons que l'égalité proposée a lieu si, et seulement si, la fonction f est de signe constant
Si f est positive alors $|f| = f$ et donc l'égalité a lieu.
Si f est négative alors $|f| = -f$ et à nouveau l'égalité a lieu.
Inversement, supposons

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|.$$

Si $\int_a^b f \geq 0$ alors on obtient

$$\int_a^b f = \int_a^b |f|$$

et donc

$$\int_a^b |f(x)| - f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $|f| - f$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Par suite $f = |f|$ et donc f est positive.

Si $\int_a^b f \leq 0$, l'étude en analogue en observant

$$\int_a^b \left|f(x)\right| + f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 62 : [énoncé]

Supposons $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.

On peut écrire $\int_a^b f = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r = \left|\int_a^b f\right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Considérons alors $g\colon t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

On a $\int_a^b g = \left|\int_a^b f\right| \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b g = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$.

Or $|g| = |f|$ et l'hypothèse de départ donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$ puis $\int_a^b |g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.

Puisque la fonction réelle $|g| - \mathrm{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle.

Par suite $\mathrm{Re}(g) = |g|$ et donc la fonction g est réelle positive.

Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec g fonction réelle positive.

La réciproque est immédiate.

Exercice 63 : [énoncé]

La fonction $\varphi\colon t \mapsto f(t) - t$ est définie, continue sur $[0\,;1]$ et

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} = 0$$

donc φ s'annule.

Exercice 64 : [énoncé]

(a) En exploitant la relation de Chasles, on peut écrire

$$S_n - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \bigl(f(a_k) - f(t)\bigr)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le segment $[a\,;b]$, elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s,t \in [a\,;n], |s-t| \leq \alpha \implies \left|f(s) - f(t)\right| \leq \varepsilon.$$

Pour n assez grand, on a $\left|(b-a)/n\right| \leq \alpha$ et alors pour tout $t \in [a_k\,;a_{k+1}]$ on a $|a_k - t| \leq \alpha$ donc $\left|f(a_k) - f(t)\right| \leq \varepsilon$. On en déduit

$$\left|S_n - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon\left|g(t)\right|\mathrm{d}t \leq \varepsilon M(b-a) \text{ avec } M = \sup_{[a;b]}|g|.$$

Par suite

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) En exprimant l'intégrale à l'aide de la primitive G

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\bigl(G(a_{k+1}) - G(a_k)\bigr).$$

En séparant la somme en deux, puis en procédant à un décalage d'indice sur la première

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1})G(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)G(a_k)$$

puis en recombinant les deux sommes

$$S_n = f(a_{n-1})G(a_n) + \sum_{k=1}^{n-1}\bigl(f(a_{k-1}) - f(a_k)\bigr)G(a_k) - f(a_0)G(a_0).$$

Or $G(a_0) = G(a) = 0$ et puisque la fonction f est décroissante et positive

$$S_n \leq f(a_{n-1})M + \sum_{k=1}^{n-1}\bigl(f(a_{k-1}) - f(a_k)\bigr)M \text{ avec } M = \max_{[a;b]} G.$$

Enfin par télescopage

$$S_n \leq f(a_0)M = f(a)M.$$

De façon symétrique, on a aussi

$$S_n \geq f(a)m \text{ avec } m = \min_{[a;b]} G.$$

(c) En passant à la limite ce qui précède, on obtient

$$f(a)m \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(a)M.$$

Si $f(a) = 0$, le problème est immédiatement résolu, sinon, ce qui précède affirme que

$$\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est valeur intermédiaire à deux valeurs prises par G et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

(d) Quitte à considérer $-f$, ce qui ne change rien au problème posé, on peut supposer que la fonction f est croissante. En appliquant le résultat précédent à la fonction $t \mapsto f(b) - f(t)$ décroissante et positive, on peut affirmer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b (f(b) - f(t))g(t)\,\mathrm{d}t = \big(f(b) - f(a)\big)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

et il suffit de réorganiser les membres de cette identité pour former celle voulue.

Exercice 65 : [énoncé]

(a) La fonction G est continue donc l'image d'un segment est un segment.

(b) Il suffit de procéder à une intégration par parties.

(c) Puisque la fonction $-f'$ est positive, on a

$$m\big(f(a) - f(b)\big) \le -\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t \le M\big(f(a) - f(b)\big)$$

et donc

$$mf(a) + \big(G(b) - m\big)f(b) \le \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le Mf(a) + \big(G(b) - M\big)f(b)$$

puis

$$mf(a) \le \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le Mf(a).$$

Ainsi, que $f(a)$ soit nul ou non, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)G(c).$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) $\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = 0$ et $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue donc il existe $a \in \left]0\,;\pi\right[$ tel que $f(a)\sin a = 0$ *i.e.* $f(a) = 0$.

(b) Par l'absurde si f ne s'annule qu'une seule fois alors le tableau de signe de f est de l'une des quatre formes suivantes

t	0		a		π
$f(t)$	0	$+$	0	$+$	0

,

t	0		a		π
$f(t)$	0	$-$	0	$-$	0

.

t	0		a		π
$f(t)$	0	$+$	0	$-$	0

ou

t	0		a		π
$f(t)$	0	$-$	0	$+$	0

.

Les deux premiers cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.
Les deux autres cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t = \cos a\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t - \sin a\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.
Absurde.

Exercice 67 : [énoncé]

Posons $g(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

$$g(x) - g(y) = \int_a^b f(t)\big(\sin(xt) - \sin(yt)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction sinus est lipschitzienne

$$\big|\sin(xt) - \sin(yt)\big| \le |x-y||t|$$

donc

$$\big|g(x) - g(y)\big| \le |x-y|\int_a^b \big|tf(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi g est lipschitzienne.

Exercice 68 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto (M - f(t))(f(t) - m)$ est positive donc

$$\int_0^1 (M - f(t))(f(t) - m)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

En développant et par linéarité, on obtient $-mM - \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ sachant $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
On en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 69 : [énoncé]

Une fonction continue d'intégrale nulle s'annule.

Introduisons la fonction $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = g(x)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction φ est continue et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Bigl(g(x)\underbrace{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}} - f(x)\underbrace{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}}\Bigr)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que la fonction φ s'annule ce qui détermine $c \in [a\,;b]$ tel que souhaité.

Exercice 70 : [énoncé]
Par l'absurde supposons que la fonction f ne soit pas identiquement nulle. Il existe alors $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) \neq 0$ et l'on peut supposer $c \in]a\,;b[$ car, si f est nulle sur $]a\,;b[$, elle l'est aussi en a et b par continuité en ces points.

On définit une fonction g nulle sauf sur un voisinage de c sur lequel la fonction f est de signe constant.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(c) > 0$. Par continuité de f en c, il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $[c - \alpha\,;c + \alpha]$ soit inclus dans $[a\,;b]$ et que f soit strictement positive sur cet intervalle. Considérons alors la fonction g définie par la figure ci-dessous

[Une figure]

La fonction g est continue et s'annule en a et b ce qui permet d'écrire

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or la fonction g est nulle en dehors de $[c - \alpha\,;c + \alpha]$ et l'on obtient donc

$$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction $t \mapsto f(t)g(t)$ est alors continue, positive et d'intégrale nulle sur $[c - \alpha\,;c + \alpha]$, c'est donc la fonction nulle. Ceci est absurde car cette fonction ne s'annule pas en c.

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Quand $x \to 0^+$,

$$\left|\int_{-x}^x \sin t^2\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-x}^x \left|\sin t^2\right|\mathrm{d}t \leq \int_{-x}^x 1.\,\mathrm{d}t = 2x \to 0$$

donc $\int_{-x}^x \sin t^2\,\mathrm{d}t \to 0$.

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

donc

$$\frac{x}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

puis

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \to +\infty.$$

(c) Par intégration par parties

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or quand $x \to +\infty$,

$$\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} \to 0 \text{ et } \left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} \to 0$$

donc
$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \to 0.$$

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Quand $x \to 0^+$, par croissance de la fonction exponentielle
$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^x}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\mathrm{e}^x \ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \le \mathrm{e}^{2x}\ln 2$$
puis par encadrement
$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \to \ln 2.$$

(b) Quand $x \to +\infty$, par décroissance de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{1/t}$
$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/2x}}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{t}\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\mathrm{e}^{1/x}\ln 2 \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \le \mathrm{e}^{1/2x}\ln 2$$
puis par encadrement
$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \to \ln 2.$$

(c) Quand $x \to +\infty$, pour x assez grand, la fonction $t \mapsto \cos(1/t)$ est croissante sur $[x\,;2x]$ donc
$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/x)}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_x^{2x} \frac{\cos(1/2x)}{t}\,\mathrm{d}t$$
puis
$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t \le \cos\left(\frac{1}{2x}\right)\ln 2$$
et par encadrement
$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t \to \ln 2.$$

Exercice 73 : [énoncé]

On a
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(0)\right| \le \frac{1}{x}\int_0^x \left|f(t)-f(0)\right|\mathrm{d}t.$$
Par la continuité de f en 0, Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \le \alpha \implies \left|f(x)-f(0)\right| \le \varepsilon$$
et donc
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(0)\right| \le \varepsilon.$$
On peut donc conclure que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$
On peut aussi très efficacement obtenir le résultat en introduisant une primitive de f et en exploitant
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(x)-F(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} F'(0) = f(0).$$

Exercice 74 : [énoncé]

Introduisons
$$F\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } G\colon x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par intégration par parties
$$G(x) = xF(x) - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(F(x)-F(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
Cas F n'est pas de signe constant
Il existe alors $a, b \in \left]0\,;1\right[$ tel que
$$F(a) = \min_{[0;1]} F < 0 \text{ et } F(b) = \max_{[0;1]} F > 0.$$
Par intégration d'une fonction continue, non nulle et de signe constant sur un intervalle non singulier, on a
$$G(a) < 0 \text{ et } G(b) > 0$$
et le théorème des valeurs intermédiaires assure que G s'annule.

Cas F est de signe constant
Quitte à considérer $-f$, supposons F positive.
Si F est nulle, il en est de même de f et la propriété est immédiate, sinon, on peut introduire $b \in]0\,;1[$ tel que

$$F(b) = \max_{[0;1]} F > 0.$$

On a alors

$$G(b) > 0 \text{ et } G(1) = -\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t < 0$$

car $F(1)$ est nul.
À nouveau, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Exercice 75 : [énoncé]
Unicité : soient F et G deux primitives solutions. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + C$.

$$\int_0^1 F = 0 = \int_0^1 G$$

donne alors $C = 0$ puis $F = G$.
Existence : Posons $\mathcal{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction

$$F\colon x \mapsto \mathcal{F}(x) - \int_0^1 \mathcal{F}(u)\,\mathrm{d}u$$

résout le problème.

Exercice 76 : [énoncé]
Notons que λ est élément de $[0\,;1]$ en tant qu'intégrale sur un intervalle de longueur 1 d'une fonction positive et majorée par 1. Il est donc possible de considérer l'intégrale de f sur $[0\,;\lambda]$.

> *On exprime la différence des deux membres comme l'intégrale d'une fonction de signe constant.*

Par la relation de Chasles,

$$\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\lambda f(x)\big(1-g(x)\big)\,\mathrm{d}x - \int_\lambda^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Pour tout réel x de l'intervalle d'intégration $[0\,;\lambda]$, on a $f(x) \geq f(\lambda)$ par décroissance de f. On en déduit $f(x)\big(1-g(x)\big) \geq f(\lambda)\big(1-g(x)\big)$ car $1-g(x)$ est positif. En intégrant en bon ordre, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda f(x)\big(1-g(x)\big)\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^\lambda f(\lambda)\big(1-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = f(\lambda)\left(\int_0^\lambda \mathrm{d}x - \int_0^\lambda g(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= f(\lambda)\left(\lambda - \int_0^\lambda g(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(\lambda)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\lambda g(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= f(\lambda)\int_\lambda^1 g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La relation (**??**) donne alors

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &\geq f(\lambda)\int_\lambda^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_\lambda^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\lambda^1 \big(f(\lambda)-f(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La fonction f étant décroissante, on a $f(\lambda) - f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\lambda\,;1]$ et comme de plus $g(x)$ est positif, on peut conclure que la dernière intégrale est positive en tant qu'intégrale bien ordonnée d'une fonction positive. Ainsi,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si la fonction f est croissante, on la transforme en une fonction décroissante par passage à l'opposé et l'on conclut à l'inégalité dans l'autre sens.

Exercice 77 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}.$$

(b) On en déduit

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} I_{p+q,0}$$

or

$$I_{p+q,0} = \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$$

donc

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}.$$

Exercice 78 : [énoncé]

(a) En appliquant le changement de variable $u = \pi/2 - t$ on obtient

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \,\mathrm{d}u$$

$t \mapsto \sin^n t$ est continue, positive sans être la fonction nulle et $0 < \pi/2$ donc $I_n > 0$

(b) Par intégration par parties

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1} t \,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t \sin^{n+1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)\sin^n t \,\mathrm{d}t = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

puis

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(c)

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

sachant $I_0 = \pi/2$.

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

sachant $I_1 = 1$.

(d) Posons $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. On

$$u_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = u_n$$

et $u_0 = I_1I_0 = \pi/2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \pi/2.$$

Pour tout $t \in [0\,;\pi/2]$,

$$\sin^{n+2} t \le \sin^{n+1} t \le \sin^n t$$

donc

$$I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n.$$

(e) On a

$$\frac{n+1}{n+2} I_n \le I_{n+1} \le I_n$$

donc $I_{n+1}/I_n \to 1$. Ainsi $I_{n+1} \sim I_n$.
Par suite

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$$

et donc

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

sachant $I_n > 0$.

Exercice 79 : [énoncé]

(a) On a

$$0 \le I_n \le \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n!} \to 0$$

donc par encadrement $I_n \to 0$.

(b) Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

(c) Pour $k \ge 1$,

$$\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n I_{k-1} - I_k = 1 + I_0 - I_n$$

avec

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}.$$

Exercice 80 : [énoncé]

(a) $I_0 = \mathrm{e} - 1$.
$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x - x\Big]_1^{\mathrm{e}} = 1$.

(b) Par intégration par parties

$$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \Big[x(\ln x)^{n+1}\Big]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

(c) Par intégration d'une fonction continue, positive et non nulle, on a $I_n > 0$.
Puisque $I_{n+1} > 0$, on a aussi $I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

(d) Par encadrement $I_n \to 0$.
Puisque $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n \to 0$ on a $(n+1)I_n \to \mathrm{e}$ puis

$$I_n \sim \frac{\mathrm{e}}{n+1} \sim \frac{\mathrm{e}}{n}.$$

(e) On a

$$D_{n+1} = (n+1)D_n$$

donc $D_n = n!D_0$.
Si $a \neq I_0$ alors $D_n \to +\infty$ puis $|u_n| \geq D_n - I_n \to +\infty$.

Exercice 81 : [énoncé]

(a) $u_0 = 1/2$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \pi/4$.

(b) On a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\,\mathrm{d}x$$

or la fonction

$$x \mapsto \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}$$

est continue, positive sans être la fonction nulle et $0 < 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

(c) On a

$$|u_n - 1| = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n} \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc $u_n \to 1$.

(d) Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^1 x\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

(e) On a

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

car il est connu que $\ln(1+t) \leq t$ pour $t > -1$.
On a alors

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \to 0$$

donc

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 82 : [énoncé]

(a) Pour $n \geq 2$, par intégration par parties (avec $u' = \sin t$ et $v = \sin^{n-1} t$)

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

donc

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

(b) $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$ puis

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 83 : [énoncé]
On a

$$2^n I_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

où l'on remarque que la fonction $t \mapsto 2t/(1+t^2)$ croît de $[0\,;1]$ sur $[0\,;1]$.
Introduisons

$$J_n = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \underset{t=\tan x/2}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x.$$

On sait

$$J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

(via $nJ_nJ_{n+1} = \pi/2$ et $J_n \sim J_{n+1}$, cf. intégrales de Wallis)

Montrons $2^n I_n \sim J_n$ en étudiant la différence

$$J_n - 2^n I_n = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

et le changement de variable $t = \tan x/2$ donne

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi/2} \cos x (\sin x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

On peut alors affirmer

$$2^n I_n - J_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis

$$2^n I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

et finalement

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\sqrt{2n}}.$$

Exercice 84 : [énoncé]

(a)
$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc $I_n \to 0$.
De plus, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\frac{x^n}{x+1} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1}$$

donc $I_n \leq I_{n+1}$.

(b)
$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k} + (-1)^n I_0.$$

(c) $I_0 = \ln 2$ et $(-1)^n I_n \to 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{-k}}{k} + \ln 2 \to 0$$

puis la conclusion.

(d) Comme ci-dessus, $J_n \to 0$. De plus

$$J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{2k+1} + (-1)^n J_0$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{\pi}{4} \to 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 85 : [énoncé]

(a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

(b) Par sommation géométrique

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$

(c) $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \geq 0$ par intégration d'une fonction positive sur $[0\,;1]$.
De plus

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$$

car $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

(d) On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\to\frac{\pi}{4}$$

car

$$\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\to 0.$$

Exercice 86 : [énoncé]

(a) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\left[\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt3}\right]_0^1=\frac{\pi}{3\sqrt3}$.

(b) $\int_0^1\frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac16\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}\right]_0^1=-\frac13\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt3}$.

(c) $\int_0^1\frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{\arctan x}{x+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$
$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac12\frac{1}{x+1}+\frac12\frac{-x+1}{x^2+1}$ donc
$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac12\ln|x+1|-\frac14\ln(x^2+1)+\frac12\arctan x+C^{te}$
puis $\int_0^1\frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{8}+\frac12\ln 2-\frac14\ln 2+\frac{\pi}{8}=\frac{\ln 2}{4}$.

Exercice 87 : [énoncé]

(a) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int 1-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C^{te}.$$

(b) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}\underset{u=\mathrm{e}^x}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2(u+1)}$$
$$=-\ln|u|+\ln|u+1|-\frac1u+C^{te}=-x+\ln(\mathrm{e}^x+1)-\mathrm{e}^{-x}+C^{te}.$$

(c) Sur $[0\,;+\infty[$,

$$\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x\underset{t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{=}\int\frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C^{te}.$$

(d) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\underset{u=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$
$$=\frac12\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1}+C^{te}=\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1)-x+C^{te}.$$

Exercice 88 : [énoncé]
Par le changement de variable $u=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}=\int_{\sqrt2}^{\sqrt{\mathrm{e}+1}}\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1}=\left[\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt2}^{\sqrt{\mathrm{e}+1}}=\ln\frac{(\sqrt{\mathrm{e}+1}-1)(\sqrt2+1)}{(\sqrt{\mathrm{e}+1}+1)(\sqrt2-1)}.$$

Exercice 89 : [énoncé]

(a) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\underset{u=\sin x}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}=\frac{1}{2\sqrt2}\int\frac{1}{u+\sqrt2}-\frac{1}{u-\sqrt2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{\sin x+\sqrt2}{\sin x-\sqrt2}\right.$$

(b) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\underset{u=\cos x}{=}\int-\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt2}{\cos x+\sqrt2}\right|+C^{te}.$$

(c) Sur $I_k=\left]\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}\underset{u=\tan x}{=}\int 1+u^2\,\mathrm{d}u=\tan x+\frac13\tan^3 x+C^{te}.$$

(d) Sur $I_k=\left]\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{(1-\sin^2(x))^2}\underset{t=\sin x}{=}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}=\frac14\int\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t}$$

donc

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=\frac14\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac12\frac{\sin x}{\cos^2 x}+C^{te}.$$

Exercice 90 : [énoncé]
Sur $I_k=\left]-\pi+2k\pi\,;\pi+2k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}\underset{t=\tan x/2}{=}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{\tan x/2}{\sqrt2}+C^{te}.$$

La fonction $x\mapsto\frac{1}{3+\cos x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, cherchons F primitive de celle-ci sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, F est primitive sur I_k, donc il existe $C_k \in \mathbb{R}$ tel que sur I_k,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C_k.$$

Par limite à droite et à gauche en $\pi + 2k\pi$,

$$F(\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{k+1}.$$

Par suite

$$\forall k \in \mathbb{Z}, C_k = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0.$$

On peut résumer :

$$\exists C_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0 & \text{si } x \in I_k \\ \frac{2k+1}{2\sqrt{2}}\pi + C_0 & \text{si } x = \pi + 2k\pi. \end{cases}$$

Ceci détermine la fonction F à une constante près.
Inversement, étant assuré de l'existence de F, on peut affirmer que de telles fonctions sont bien primitives de $x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}$.

Exercice 91 : [énoncé]
L'intégrale est bien définie et détermine la primitive F s'annulant en 0 de la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{3 + \cos^2 x}.$$

> *Le calcul de l'intégrale par le changement de variable proposé n'est possible que sur l'intervalle $I =]-\pi/2\,;\pi/2[$.*

BOF Pour calculer, l'intégrale on est tenté de procéder au changement de variable $u = \tan t$ mais celui-ci n'est possible que pour $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$ et alors

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{(4+3u^2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan x\right).$$

Par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad F(-\pi/2) = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

Puisque la fonction intégrée est π-périodique, on a

$$F(x+\pi) - F(x) = C^{te}$$

avec

$$C^{te} = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

On peut alors calculer $F(x)$ en commençant par déterminer $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x + k\pi \in]-\pi/2\,;\pi/2]$$

puis en exploitant

$$F(x) = F(x+k\pi) - \frac{k\pi}{2\sqrt{3}}$$

avec

$$F(x+k\pi) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right).$$

Exercice 92 : [énoncé]

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x} \underset{t=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(c) Par la relation de Chasles

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} 1+$$

Via des changements de variable affines adéquates :

$$I = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}.$$

Sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \underset{t=\tan x}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$$

Soit F une primitive de $\frac{1}{1+\cos^2 x}$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$ sur $[0\,;\pi/2[$ et par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C.$$

Finalement $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \Big[F(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ puis $I = \sqrt{2}\pi$.

Exercice 93 : [énoncé]

(a) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x \underset{u=\operatorname{ch} x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} = \ln \operatorname{ch} x - \ln(\operatorname{ch} x+1) + C^{te}$.

(b) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x \underset{u=\operatorname{sh} x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{2}} + C^{te}$.

(c) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x} \underset{u=\operatorname{th} x}{=} \int -\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x+1}{\operatorname{th} x-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\operatorname{th} x} + C^{te}$
ou encore $\int \frac{\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x} = \int \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2\mathrm{e}^x} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\mathrm{e}^{2x}} + C^{te}$.

(d) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^3 x} = \int \frac{\operatorname{ch} x}{(1+\operatorname{sh}^2 x)^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\operatorname{sh} x}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan \operatorname{sh} x + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + C^{te}$

Exercice 94 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} \underset{t=\mathrm{e}^x}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\arctan \mathrm{e} - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 95 : [énoncé]

(a) Sur $[-1\,;+\infty[$,
$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}} \underset{u=\sqrt{x+1}}{=} \int \frac{2u(u^2-1)}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int 2u(u-1)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 - x + C^{te}$.

(b) Sur $[0\,;+\infty[$, $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \int 2u\frac{1-u}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\int -u+2-\frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u =$
$-x+4\sqrt{x}-4\ln(1+\sqrt{x}) + C^{te}$.

(c) Sur $]-\infty\,;1]$ ou $]2\,;+\infty[$,
$\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2y^2\,\mathrm{d}y}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C^{te}$
donc $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{|x-1|}-\sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-2|}} + C^{te}$.

Exercice 96 : [énoncé]

(a) Sur $]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}[$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{2}\sin t}{=} \int \sqrt{2}\sin t + 1\,\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\cos t + t + C^{te} =$
$-\sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C^{te}$.

(b) Sur $]1\,;3[$,
$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \underset{x=2+\sin t}{=} \int 2+\sin t\,\mathrm{d}t = 2\arcsin(x-2) - \sqrt{(x-1)(3-x)} + C^{te}$.

(c) $x-x^2+6 = -(x-3)(x+2)$, $x = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sin t$. Sur $[-2\,;3]$,
$\int \sqrt{x-x^2+6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{25}{4}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{25}{8}\int \cos 2t + 1\,\mathrm{d}t =$
$\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2+6} + \frac{25}{8}\arcsin\frac{2x-1}{5} + C^{te}$

(d) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \underset{x=\operatorname{sh} t}{=} \int \operatorname{sh} t + 1\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C^{te}$.

(e) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^2}} \underset{x=\operatorname{sh} t}{=} \int \frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t} = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t =$
$\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} + C^{te}$.

(f) Sur $[1\,;+\infty[$ (et de même sur $]-\infty\,;-1]$)
$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x \underset{x=\operatorname{ch} t}{=} \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t \underset{u=\operatorname{sh} t}{=} \int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{x^2-1} - \arctan\sqrt{x^2-1} + C^{te}$.

Exercice 97 : [énoncé]

On écrit le trinôme sous forme canonique

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ce qui invite au changement de variable

$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$$

qui donne

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3}\operatorname{sh} t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t - 1} \underset{u=\operatorname{ch} t}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$

et enfin

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}} + C^{te}.$$

Exercice 98 : [énoncé]

(a) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+3)} \underset{t=\sqrt{x}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

(b) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x+4)} \underset{t=\sqrt{x+1}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

(c) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \underset{u=\sqrt{1+x}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u+\sqrt{2-u^2}} \underset{u=\sqrt{2}\sin\theta}{=} 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{4t(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(-t^2+2t+1)(1+t^2)^2} =$
$2\sqrt{2}\int_0^1 -\frac{1}{1+t^2} + 2\frac{1+t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{t^2-2t-1}\,\mathrm{d}t$
Au final $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2}+1)$.