Probabilités sur un univers fini

Événements et langage ensembliste

Exercice 1 [04003] [Correction]
Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisable. Exprimer les évènements suivants :

(a) Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.

(b) Un seul des trois évènements A, B ou C est réalisé.

(c) Au moins deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.

(d) Pas plus de deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.

Exercice 2 [04004] [Correction]
Soient A, B, C trois évènements.

(a) Vérifier que $(A \cup B) \cap C$ entraîne $A \cup (B \cap C)$.

(b) À quelle condition sur A et C les deux évènements précédents sont-ils égaux ?

Construction d'une probabilité

Exercice 3 [03821] [Correction]
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 4 [03822] [Correction]
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 5 [03824] [Correction]
Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap \overline{B} \neq \emptyset, \overline{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

À quelle condition sur $(a, b, c, d) \in \,]0\,;1[^4$ existe-t-il une probabilité P sur Ω vérifiant

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = a, \mathrm{P}(A \,|\, \overline{B}) = b, \mathrm{P}(B \,|\, A) = c \text{ et } \mathrm{P}(B \,|\, \overline{A}) = d?$$

Exercice 6 [03829] [Correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
Montrer

$$\max\bigl\{0, \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1\bigr\} \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \min\bigl\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\bigr\}.$$

Probabité par dénombrement

Exercice 7 [03957] [Correction]
On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leq n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.
Les répartitions possibles sont équiprobables.

(a) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$$A = \text{« chaque urne contient au plus une boule »}.$$

(b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$$B = \text{« il existe une urne contenant au moins deux boules »}.$$

Exercice 8 [03958] [Correction]

(a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?

(b) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

Exercice 9 [04116] [Correction]
Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p + q = 1$). On opère à des tirages successifs avec remise.

(a) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?

(b) Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?

Exercice 10 [04120] [Correction]
Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?

(b) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.

(c) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

Probabilités conditionnelles

Exercice 11 [03361] [Correction]
Soient A et B deux évènements avec $\mathrm{P}(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$\mathrm{P}(A \cap B \,|\, A \cup B) \text{ et } \mathrm{P}(A \cap B \,|\, A).$$

Exercice 12 [03826] [Correction]
On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 13 [03831] [Correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Établir

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \,|\, B)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \,|\, \overline{B})\mathrm{P}(\overline{B}).$$

Exercice 14 [03841] [Correction]
Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

(a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?

(b) Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 15 [03955] [Correction]
Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

(a) Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?

(b) Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?

Exercice 16 [04012] [Correction]
Soient A, B, C trois évènements avec $\mathrm{P}(B \cap C) > 0$. Vérifier

$$\mathrm{P}(A \,|\, B \cap C)\mathrm{P}(B \,|\, C) = \mathrm{P}(A \cap B \,|\, C).$$

Exercice 17 [04956] [Correction]
Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T la variable aléatoire à valeurs dans $[\![2\,;n+1]\!]$ précisant le nombre de tirages alors effectués.

(a) Proposer un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience.

(b) Calculer $\mathrm{P}(T = 2)$.

(c) Soit $k \in [\![1\,;n+1]\!]$. Exprimer $\mathrm{P}(T > k \,|\, T > k-1)$.

(d) Donner un expression de $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout $k \in [\![2\,;n+1]\!]$

Formule des probabilités totales

Exercice 18 [03842] [Correction]
Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 19 [03827] [Correction]
Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Événements indépendants

Exercice 20 [03948] [Correction]
On lance à dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des évènements

$$A = \text{« on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »} \quad \text{et } B = \text{« on obtient le tirage 3 ou 6 »}.$$

Exercice 21 [03951] [Correction]
Soient A et B deux évènements indépendants. Les évènements A et $\overline{B}$ sont-ils aussi indépendants ?

Exercice 22 [03953] [Correction]
Montrer qu'un évènement A est indépendant de tout autre évènement si, et seulement si, $\mathrm{P}(A) = 0$ ou 1.

Exercice 23 [03949] [Correction]
Soient A, B, C trois évènements tels que A et B d'une part, A et C d'autre part, soient indépendants. Les événements A et $B \cup C$ sont-ils indépendants ? Même question avec A et $B \cap C$.

Exercice 24 [03950] [Correction]
Soient A, B, C trois évènements tels que A et $B \cup C$ d'une part, A et $B \cap C$ d'autre part, soient indépendants. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 25 [04033] [Correction]
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\right).$$

Exercice 26 [04946] [Correction]
On donne la décomposition en facteurs irréductibles d'un entier $n \geq 2$

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

et note P la probabilité uniforme sur $\Omega = [\![1 \,; n]\!]$.

(a) Que définit la fonction d'Euler $\varphi(n)$? Rappeler sa valeur.

(b) Soit d un diviseur de n et $D(d)$ l'ensemble de ses multiples dans Ω. Calculer $\mathrm{P}\big(D(d)\big)$.

(c) On note A l'ensemble des entiers de Ω premiers avec n ; montrer

$$A = \bigcap_{k=1}^{r} \overline{D(p_k)}.$$

(d) Retrouver la valeur de $\varphi(n)$.

Formule de Bayes

Exercice 27 [03820] [Correction]
Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 28 [03962] [Correction]
Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées).
On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

(a) On obtient un « six ». Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?

(b) Au contraire, on a obtenu un « cinq ». Même question.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

(b) $\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$.

(c) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

(d) $\overline{A \cap B \cap C}$.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) En développant

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

(b) $A \cap C = A$ *i.e.* $A \subset C$ est une condition évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire car si

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

alors

$$A \subset A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C \subset C.$$

Exercice 3 : [énoncé]

Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(\{k\}) = \alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\{k\}) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$$

donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Exercice 4 : [énoncé]

Si P est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{P}(\{1, 2, \dots, k\}) = \alpha k^2.$$

En particulier, $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ donne $\alpha = 1/n^2$.
Aussi,

$$\mathrm{P}(\{k\}) = \mathrm{P}(\{1, \dots, k\}) - \mathrm{P}(\{1, \dots, k-1\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Inversement, on définit bien une probabilité en posant

$$\mathrm{P}(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

car ces valeurs sont positives de somme égale à 1.
On vérifie aussi par additivité

$$\mathrm{P}(\{1, 2, \dots, k\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}$$

et la probabilité déterminée est bien solution.

Exercice 5 : [énoncé]

Soit P une probabilité solution. Posons

$$x = \mathrm{P}(A \cap B), y = \mathrm{P}(A \cap \overline{B}), z = \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) \text{ et } t = \mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

On a $x, y, z, t \geq 0$ et par additivité

$$x + y + z + t = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1.$$

Inversement, si x, y, z, t sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité P sur Ω vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à x, y, z et t respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.
Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe $x, y, z, t \geq 0$ de somme égale à 1 tels que

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = a, \mathrm{P}(A \,|\, \overline{B}) = b, \mathrm{P}(B \,|\, A) = c \text{ et } \mathrm{P}(B \,|\, \overline{A}) = d.$$

Par additivité

$$\mathrm{P}(A) = x + y \text{ et } \mathrm{P}(B) = x + z.$$

On a alors $\mathrm{P}(A \,|\, B) = a$ si, et seulement si, $x = a(x + z)$.
De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1 - (x + z)), x = c(x + y) \text{ et } z = d(1 - (x + y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues

$$\begin{cases} (1-a)x - az = 0 \\ bx + y + bz = b \\ (1-c)x - cy = 0 \\ dx + dy + z = d. \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c)+bc}, y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c)+bc} \text{ et } z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c)+bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.
La quatrième équation du système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d).$$

La solution (x, y, z) alors obtenue vérifie $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z \leq 1$ de sorte qu'on peut encore déterminer $t \geq 0$ tel que $x + y + z + t = 1$.
Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par $abcd$, peut encore s'énoncer

$$\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) = \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right).$$

Exercice 6 : [énoncé]
On a $A \cap B \subset A$ donc $\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(A)$ et de même $\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(B)$ donc

$$\mathrm{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\}.$$

Bien évidemment $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0$. De plus $\mathrm{P}(A \cup B) \leq 1$ or

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

donc

$$\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1$$

puis

$$\max\{0, \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1\} \leq \mathrm{P}(A \cap B).$$

Exercice 7 : [énoncé]
En discernant les boules et les urnes, chaque tirage se comprend comme une application φ de $\{1, \ldots, r\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ associant à la boule d'indice i l'urne de numéro $\varphi(i)$ qui la contient.
Il y a n^r répartitions possible.

(a) La probabilité cherchée correspond à celle de choisir une fonction φ injective soit

$$P(A) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots (n-r+1)}{n^r}.$$

(b) La probabilité cherchée est complémentaire de la précédente

$$P(B) = 1 - P(A).$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.

(b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Exercice 9 : [énoncé]
Notons A_i l'événement « une boule blanche est obtenue lors du i-ème tirage ».
Les événements A_i sont mutuellement indépendants et $\mathrm{P}(A_i) = p$ pour tout i.

(a) Notons B_n l'événement « la première boule blanche apparaît lors du n-ième tirage ».
On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

Par indépendance, on obtient

$$\mathrm{P}(B_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

(b) Notons C_{n-1} l'événement « $k-1$ boules sont apparues lors des $n-1$ premiers tirages »
et D_n l'événement « la k-ième boule blanche tirée apparaît lors du n-ième tirage ».
On a $D_n = C_{n-1} \cap A_n$ et

$$\mathrm{P}(C_{n-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
Par indépendance, on conclut

$$\mathrm{P}(D_n) = \mathrm{P}(C_{n-1} \cap A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.

(b) Un tirage s'apparente à une fonction de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$. Il y a 10^3 fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a $\binom{10}{3}$ possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}.$$

(c) Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$. À une telle fonction f, on peut associer la fonction $g\colon [\![1\,;3]\!] \to [\![1\,;12]\!]$ déterminée par

$$g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 \text{ et } g(3) = f(3) + 2.$$

La fonction f étant croissante, la fonction g est strictement croissante. Inversement, à une fonction g strictement croissante de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;12]\!]$ correspond une unique fonction f croissante de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$. Il y a donc autant de fonctions croissantes de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$ que de fonctions strictement croissantes de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;12]\!]$ à savoir $\binom{12}{3}$. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}.$$

Exercice 11 : [énoncé]

Puisque $A \subset A \cup B$, on a $\mathrm{P}(A \cup B) \geq \mathrm{P}(A)$ puis

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A \cup B)} \leq \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

i.e.

$$\mathrm{P}(A \cap B \,|\, A \cup B) \leq \mathrm{P}(A \cap B \,|\, A).$$

Exercice 12 : [énoncé]

Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$\mathrm{P}(A) = p.$$

Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i. Par hypothèse $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$\mathrm{P}(A_i) = p/N.$$

La question posée consiste à déterminer

$$\mathrm{P}(A_N \,|\, \overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{N-1}).$$

On a

$$\mathrm{P}(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{N-1}) = 1 - \mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$

et

$$\mathrm{P}(A_N \cap \overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{N-1}) = \mathrm{P}(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$\mathrm{P}(A_N \,|\, \overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{N-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

On a

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap (B \cup \overline{B})) = \mathrm{P}\big((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\big).$$

Les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ étant disjoints

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}).$$

Or $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \,|\, B)\mathrm{P}(B)$ et $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A \,|\, \overline{B})\mathrm{P}(\overline{B})$.

Exercice 14 : [énoncé]

(a) L'évènement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches. Par dénombrement, sa probabilité est

$$\binom{8}{3} \Big/ \binom{10}{3} = \frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

(b) Notons A l'événement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus
$$\mathrm{P}(A) = \frac{9\times 8 + 9\times 8}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{5}.$$
L'événement B, au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc
$$\mathrm{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{3}{8}.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Il y a $\binom{52}{5}$ distributions possibles équiprobables.
Il y a exactement $\binom{4}{2}$ paires d'As, $\binom{48}{3}$ façons de compléter ce jeu avec d'autres cartes que des As.
Au final, ce la donne la probabilité
$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54145} \simeq 0,04.$$

(b) La probabilité que le jeu distribué ne comporte pas d'As est
$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$
et par complément, celle que le jeu distribué comporte au moins un As est
$$1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}.$$
La probabilité conditionnelle cherchée est donc
$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}} = \frac{1081}{9236} \simeq 0,12.$$

Exercice 16 : [énoncé]

On a
$$\mathrm{P}(A\,|\,B\cap C)\mathrm{P}(B\,|\,C) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B\cap C)}{\mathrm{P}(B\cap C)}\frac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \mathrm{P}(A\cap B\,|\,C).$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Quitte à poursuivre les tirages dans l'urne, on peut supposer que l'on tire exactement $n+1$ boules dans celle-ci et on s'intéresse alors au rang d'apparition d'un premier tirage identique à l'un des précédents. Les tirages étant équiprobables, on considère $\Omega = [\![1\,;n]\!]^{n+1}$ muni de la probabilité uniforme.

(b) Pour $k \in [\![1\,;n+1]\!]$, introduisons X_k la variable aléatoire déterminant le numéro de la boule obtenue lors du k-ième tirage : celles-ci sont mutuellement indépendantes car le tirage est supposé avoir lieu avec remise. L'événement $T = 2$ se confond avec $X_1 = X_2$ qui est lui-même la réunion des $(X_1 = i, X_2 = i)$ pour i allant de 1 à n. Ces derniers événements étant deux à deux incompatibles
$$\mathrm{P}(T=2) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X_1 = i)\mathrm{P}(X_2 = i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

(c) L'événement $(T > k-1)$ est de probabilité non nulle et correspond à l'obtention de valeurs deux à deux distinctes de $X_1,\dots,X_{k-1}$. Par conséquent,
$$\mathrm{P}(T>k\,|\,T>k-1) = \mathrm{P}(X_k \neq X_1,\dots,X_{k-1}\,|\,T>k-1) = \frac{n-(k-1)}{n}.$$

(d) Pour $k \in [\![1\,;n+1]\!]$, on a par définition d'une probabilité conditionnelle,
$$\mathrm{P}(T>k\,|\,T>k-1) = \frac{\mathrm{P}(T>k, T>k-1)}{\mathrm{P}(T>k-1)} = \frac{\mathrm{P}(T>k)}{\mathrm{P}(T>k-1)}$$
et donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T>k) &= \frac{n-(k-1)}{n}\mathrm{P}(T>k-1) = \cdots \\ &= \underbrace{\frac{n-(k-1)}{n}\cdot\frac{n-(k-2)}{n}\cdots\frac{n-1}{n}}_{k-1 \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.\end{aligned}$$
Pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, on obtient
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=k) &= \mathrm{P}(T>k-1) - \mathrm{P}(T>k) \\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!n^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{(k-1)n!}{(n-k+1)!n^k}.\end{aligned}$$

Exercice 18 : [énoncé]
Notons A_i l'événement la boule obtenue lors du i-ème tirage est noire.
On introduit un système complet d'événements en considérant $B_1, \dots, B_4$ égaux à

$$A_1 \cap A_2, A_1 \cap \overline{A}_2, \overline{A}_1 \cap A_2 \text{ et } \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2.$$

Par la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(A_3) = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}(A_3 \,|\, B_k)\mathrm{P}(B_k).$$

Il ne reste plus qu'à évaluer...

$$\mathrm{P}(A_3 \,|\, B_1) = 0.$$

$$\mathrm{P}(A_3 \,|\, B_2) = \mathrm{P}(A_3 \,|\, B_3) = 1/8 \text{ avec } \mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(B_3) = 8/10 \times 2/9$$

et

$$\mathrm{P}(A_3 \,|\, B_4) = 2/8 \text{ avec } \mathrm{P}(B_4) = 8/10 \times 7/9.$$

Au final

$$\mathrm{P}(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

C'est aussi la probabilité que la première boule tirée soit noire et par un argument de symétrie ce n'est pas si étonnant...

Exercice 19 : [énoncé]
On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$.
Supposons connu p_n. Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n).$$

La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p.$$

Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique a pour terme général

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^{n-1}}{2}.$$

Si $p \in \left]0\,;1\right[$ alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \to 1/2$.

Exercice 20 : [énoncé]
$\mathrm{P}(A) = 1/2$, $\mathrm{P}(B) = 1/3$ et $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\{6\}) = 1/6$ donc

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B).$$

Les évènements A et B sont bien indépendants.

Exercice 21 : [énoncé]
Puisque A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, on a

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B})$$

et donc

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B})$$

puis

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A)\big(1 - \mathrm{P}(B)\big) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B}).$$

Les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 22 : [énoncé]
Si A et indépendant de tout évènement alors A est indépendant de lui-même et donc

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap A) = \mathrm{P}(A)^2.$$

On en déduit $\mathrm{P}(A) = 0$ ou 1.
Inversement, supposons $\mathrm{P}(A) = 0$. Pour tout évènement B, on a $A \cap B \subset A$ et donc $\mathrm{P}(A \cap B) \le \mathrm{P}(A) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 0 = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Supposons maintenant $\mathrm{P}(A) = 1$. On a $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0$ et donc $\overline{A}$ est indépendant de tout évènement B. Par suite, A est aussi indépendant de tout évènement B.

Exercice 23 : [énoncé]
Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2,4,6\}, B = \{1,2\} \text{ et } C = \{2,3\}.$$

On vérifie aisément

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \text{ et } \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C).$$

Cependant
$$\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=1/6\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)=1/4$$
et
$$\mathrm{P}(A\cap(B\cap C))=1/6\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cap C)=1/12.$$
Ainsi, A et $B\cup C$ ne sont pas indépendants. Non plus, A et $B\cap C$.

Exercice 24 : [énoncé]
Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons
$$A=\{2,4,6\}\,,B=\{1,2,3\}\ \text{ et }\ C=\{1,2,4\}\,.$$
On vérifie aisément
$$\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=1/3=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)\text{ et }\mathrm{P}(A\cap(B\cap C))=1/6=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cap C).$$
Cependant
$$\mathrm{P}(A\cap B)=1/6\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=1/4.$$

Exercice 25 : [énoncé]
On étudie
$$\mathrm{P}\Bigl(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\Bigr).$$
Par indépendances des $\overline{A_i}$, on a
$$\mathrm{P}\Bigl(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\Bigr)=\prod_{i=1}^{n}\bigl(1-\mathrm{P}(A_i)\bigr).$$
Or $1-x\leq\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc
$$\mathrm{P}\Bigl(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\Bigr)\leq\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{P}(A_i)}=\exp\Bigl(-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\Bigr).$$

Exercice 26 : [énoncé]

(a) $\varphi(n)$ détermine le nombre d'entiers de $[\![1\,;n]\!]$ premiers avec n. C'est aussi le nombre d'inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On sait
$$\varphi(n)=n\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1-\frac{1}{p_k}\Bigr).$$

(b) Il y a exactement n/d multiples de d dans $[\![1\,;n]\!]$, ce sont $d,2d,\dots,n$. On en déduit $\mathrm{P}\bigl(D(d)\bigr)=1/d$.

(c) Les entiers ℓ de Ω premiers avec n sont tels que $\ell\wedge n=1$, ils correspondent aux entiers qui ne sont divisibles par aucun des facteurs premiers de n.

(d) Les événements $D(p_1),\dots,D(p_r)$ sont mutuellement indépendants car, si $1\leq i_1<\dots<i_s\leq r$, on a
$$D(p_{i_1}\dots p_{i_s})=D(p_{i_1})\cap\ldots\cap D(p_{i_s})$$
et donc
$$\mathrm{P}\bigl(D(p_{i_1})\cap\ldots\cap D(p_{i_s})\bigr)=\frac{1}{p_{i_1}\dots p_{i_s}}=\mathrm{P}\bigl(D(p_{i_1})\bigr)\times\dots\times\mathrm{P}\bigl(D(p_{i_s})\bigr).$$
L'indépendance des $D(p_1),\dots,D(p_r)$ entraîne celle des événements contraires $\overline{D(p_1)},\dots,\overline{D(p_r)}$ et donc
$$\mathrm{P}(A)=\prod_{k=1}^{r}\mathrm{P}\bigl(\overline{D(p_k)}\bigr)=\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1-\frac{1}{p_k}\Bigr).$$
Aussi,
$$\mathrm{P}(A)=\frac{\operatorname{Card}A}{\operatorname{Card}\Omega}=\frac{\varphi(n)}{n}$$
et on retrouve la formule précédente.

Exercice 27 : [énoncé]
Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a
$$\mathrm{P}(M)=10^{-4},\mathrm{P}(T\,|\,M)=0,99\text{ et }\mathrm{P}(T\,|\,\overline{M})=10^{-3}.$$
Par la formule des probabilités totales
$$\mathrm{P}(T)=\mathrm{P}(T\,|\,M)\mathrm{P}(M)+\mathrm{P}(T\,|\,\overline{M})\mathrm{P}(\overline{M})$$
puis par la formule de Bayes
$$\mathrm{P}(M\,|\,T)=\frac{\mathrm{P}(M\cap T)}{\mathrm{P}(T)}=\frac{\mathrm{P}(T\,|\,M)\mathrm{P}(M)}{\mathrm{P}(T)}$$
ce qui numériquement donne 9 %.
La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de 1/10000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1000.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Notons D l'évènement le dé tiré est équilibré et A l'évènement : on a obtenu un « six »

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(\overline{D}) = 1/2, \mathrm{P}(A \,|\, D) = 1/6 \text{ et } \mathrm{P}(A \,|\, \overline{D}) = 1/2.$$

Par la formule de Bayes

$$\mathrm{P}(D \,|\, A) = \frac{\mathrm{P}(A \,|\, D)\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(A)}$$

avec par la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \,|\, D)\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \,|\, \overline{D})\mathrm{P}(\overline{D}).$$

On obtient

$$\mathrm{P}(D \,|\, A) = \frac{1}{4}.$$

(b) Notons B l'évènement : on a obtenu un « cinq » Par des calculs analogues aux précédents

$$\mathrm{P}(D \,|\, B) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10}} = \frac{5}{8}.$$