Correction

Partie I

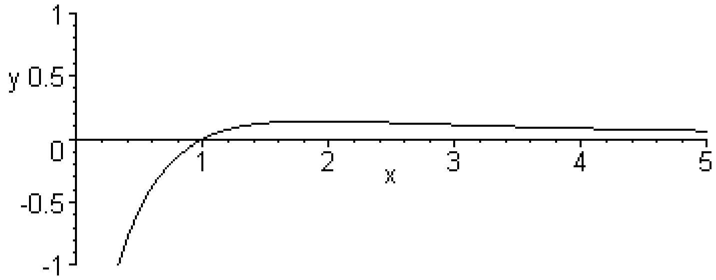
1.a f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est $\mathcal{C}^\infty$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

1.b $f'(x) = \dfrac{(1+x^2) - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$ du signe de $g(x)$ car $x(1+x^2)^2 > 0$.

1.c g est $\mathcal{C}^\infty$ et $g'(x) = -4x\ln x$ du signe de $-\ln x$.
g est strictement croissante sur $]0,1[$ avec $\lim\limits_0 g = 1$ et $g(1) = 2$.
g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ avec $g(1) = 2$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$.
Par suite l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0,1]$ et en admet une et une seule m dans $[1,+\infty[$.

2.a f est croissante sur $]0,m]$ et décroissante sur $[m,+\infty[$.
$\lim\limits_0 f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ de manière immédiate.
$f(m) = \dfrac{\ln m}{1+m^2} = \dfrac{\ln m}{2m^2 \ln m} = \dfrac{1}{2m^2}$ car $1+m^2 - 2m^2 \ln m = 0$.

2.b A la calculatrice : $g(1{,}89) > 0$ et $g(1{,}90) < 0$ donc $m = 1{,}89$ à 10^{-2} près.



Partie II

1.a Si $x \geq 1$ alors $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive avec des bornes en ordre croissante, donc $F(x) \geq 0$.
Si $x \leq 1$ alors $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction négative avec des bornes en ordre décroissante, donc $F(x) \geq 0$.
Finalement F est une fonction positive.

1.b F est la primitive de f qui s'annule en 1.
F est donc dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

1.c $F'(x) = f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

2. Via le changement de variable : $u = 1/t$:
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{1/x} \frac{-\ln u}{1+1/u^2}\frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = \int_1^{1/x} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = F(1/x)$.

3.a Quand $x \to 0$, $\varphi(x) = \dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} \to (\arctan)'(0) = 1$.
φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

3.b Par intégration par parties : $F(x) = [\ln t \arctan t]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x \arctan x - \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

3.c Quand $x \to 0$, $\ln x \arctan x \sim x \ln x \to 0$

et $\int_1^x \varphi(t)\,dt \to \int_1^0 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ car φ est continue sur $[0,1]$.

Ainsi $F(x) \to \int_0^1 \varphi(t)\,dt = F(0)$.

Quand $x \to +\infty$, $F(x) = F(1/x) \to F(0)$. F tend vers $F(0)$ en $+\infty$.

3.d F est continue en 0 et $F'(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.

F n'est pas dérivable en 0 et Γ présente une tangente verticale en 0.

4.a $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t\,\mathrm{d}t \underset{ipp}{=} \left[\dfrac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_1^x - \int_1^x \dfrac{t^k}{(k+1)}dt = \dfrac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \dfrac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}$.

4.b Par récurrence ou $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = \dfrac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$.

4.c $\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| = \left|\int_1^x \ln t\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_1^x \ln t\,\dfrac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|$

donc $\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \le -\int_x^1 (-\ln t)\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \le -\int_x^1 (-\ln t)t^{2n+2}\mathrm{d}t = I_{2n+2}(x)$

4.d Quand $x \to 0$: $F(x) \to F(0)$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) \to \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = u_n$ et $I_{2n+2}(x) \to \dfrac{1}{(2n+3)^2}$

et l'inégalité précédente donne à la limite : $\left|F(0) - u_n\right| \le \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.

4.e Pour $n = 6$ on a $\dfrac{1}{(2n+3)^2} \le 0{,}5.10^{-2}$.

A la calculatrice $u_6 = 0{,}92$ à $0{,}5.10^{-2}$ près.

Donc $F(0) = 0{,}92$ à 10^{-2} près.

5. Sur $]0,m]$, $f = F'$ est croissante et donc F convexe.

Sur $[m,+\infty[$, $f = F'$ est décroissante et donc F concave.

Le point d'inflexion est en m.