Calcul de l'intégrale de Gauss

L'objectif de ce problème est de calculer $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la fonction $X \mapsto \int_0^X \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est croissante et majorée.
En déduire l'existence de la limite définissant I .

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

2.a Calculer a_0 et a_1 .

2.b Démontrer l'inégalité stricte : $0 < a_{n+1} < a_n$.

2.c En supposant $n \geq 2$, former une relation de récurrence liant a_n et a_{n-2} .

2.d Montrer que, si $n \geq 1$, on a l'égalité : $n a_n a_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

2.e On suppose toujours $n \geq 1$.
A l'aide de l'encadrement : $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$ déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

2.f A l'aide des résultats précédents, déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Soit x élément de $]-1,+\infty[$. On pose $h(x) = x - \ln(1+x)$.
Etudier les variations de h sur $]-1,+\infty[$.
Quelle inégalité en déduit-on ?

4. On pose, n désignant un entier strictement positif :
$$b_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad c_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n} = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n} .$$

4.a Réaliser le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$ sur $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n}$ et en déduite l'existence de la limite définissant c_n .

4.b En employant, notamment, l'inégalité trouvée dans la question 3, démontrer la double inégalité :
$b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq c_n$.

4.c A l'aide de changements de variable convenablement choisis, exprimer b_n et c_n à l'aide des intégrales a_{2n+1} et a_{2n-2} .

5. A l'aide des résultats précédents, déterminer la valeur de I .