Correction

Partie I

1.a Dresser le tableau de variation de $\varphi : x \mapsto x - \ln(1+x)$.

1.b Pour $n \geq 1$: $\ln(n+1) - \ln n = \ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.

Pour $n \geq 2$: $\ln n - \ln(n-1) = \ln \frac{n}{n-1} = -\ln \frac{n-1}{n} = -\ln(1-\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n}$.

2.a $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$.

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(k-1) = 1 + \ln n - \ln 1 = 1 + \ln n$.

2.b $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{\ln n + 1}{\ln n}$ or $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \sim \frac{\ln n}{\ln n} = 1$ et $\frac{\ln n + 1}{\ln n} \sim \frac{\ln n}{\ln n} = 1$ donc par le théorème des gendarmes $\frac{H_n}{\ln n} \to 1$ puis $H_n \sim \ln n$.

3.a $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0$ et $u_n = H_n - \ln(n+1) \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge.

3.b $u_n \to \gamma$ donc on peut écrire $u_n = \gamma + o(1)$.

$\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln n + o(1)$ car $\ln(1+\frac{1}{n}) \to 0$

donc on peut écrire $H_n = u_n + \ln(n+1) = \gamma + o(1) + \ln n + o(1) = \ln n + \gamma + o(1)$.

Partie II

1.a $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$.

$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq 0$.

$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0$.

Ainsi les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1.b Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite par adjacence donc (S_n) converge aussi vers cette limite.

2.a Cela peut se faire par récurrence ou de la manière suivante qui est à l'origine de la formule :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

donne $S_{2n} = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = -H_n + H_{2n}$.

2.b $S_{2n} = H_{2n} - H_n = \ln 2n + \gamma + o(1) - \ln n + \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1) \to \ln 2$ donc $\ell = \ln 2$.

3. Par adjacence : $S_{2n} \leq \ell \leq S_{2n+1}$ donc $\left|S_{2n} - \ell\right| = \ell - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$.

Par adjacence : $S_{2n+2} \leq \ell \leq S_{2n+1}$ donc $\left|S_{2n+1} - \ell\right| = S_{2n+1} - \ell \leq S_{2n+1} - S_{2n+2} = \dfrac{1}{2n+2}$.

Par suite, que n soit pair ou impair : $\left|S_n - \ell\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Partie III

1.a

k	1	2	3	4	5	6	…
$\cos\dfrac{2k\pi}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	1	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	1	…

$$T_{3n} = \sum_{\substack{k=1 \\ k=0\ [3]}}^{3n} \frac{\cos(2k\pi/3)}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k=1\ [3]}}^{3n} \frac{\cos(2k\pi/3)}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k=2\ [3]}}^{3n} \frac{\cos(2k\pi/3)}{k}$$

donne $T_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{-1/2}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{-1/2}{3k+2} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} - \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+1} - \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+2}$

$a = 1, b = -1/2$ et $c = -1/2$.

1.b $T_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} - \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} - \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3k+2}\right)$

donne $T_{3n} = \dfrac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k} - \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{3n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{3n} \dfrac{1}{k}$

2. $T_{3n} = \dfrac{1}{2}\left(H_n - H_{3n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln n + \gamma + o(1) - \ln 3n + \gamma + o(1)\right) = -\dfrac{1}{2}\ln 3 + o(1)$.

Ainsi $T_{3n} \to -\dfrac{1}{2}\ln 3$.

De plus $T_{3n+1} = T_{3n} - \dfrac{1/2}{3n+1} \to -\dfrac{1}{2}\ln 3$ et $T_{3n+2} = T_{3n} - \dfrac{1/2}{3n+1} - \dfrac{1/2}{3n+2} \to -\dfrac{1}{2}\ln 3$

donc $T_n \to -\dfrac{1}{2}\ln 3$.