Correction

Partie I

1. $S_{n+1}(p)-S_n(p)=\dfrac{1}{(n+1)^p}\geq 0$ donc $\left(S_n(p)\right)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

2.a Sur $[k,k+1]$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^p}\leq\dfrac{1}{t^p}\leq\dfrac{1}{k^p}$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^p}\mathrm{d}t\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{t^p}\mathrm{d}t\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{k^p}\mathrm{d}t$ puis
$\displaystyle\frac{1}{(k+1)^p}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{t^p}\mathrm{d}t\leq\frac{1}{k^p}$.

2.b $\displaystyle S_n(p)-1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\leq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^p}\mathrm{d}t=\int_1^n\frac{1}{t^p}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{(p-1)t^{p-1}}\right]_1^n=\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)\leq\frac{1}{p-1}$.

2.c La suite $\left(S_n(p)\right)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée donc convergente.

Partie II

1. Unicité : Soit F et G deux solutions.
F et G sont toutes deux primitives de f donc $\exists C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in[0,\pi]$, $F(t)=G(t)+C$.
Donc $\displaystyle\int_0^\pi F(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi G(t)\mathrm{d}t+\pi C$ puis $C=0$ car $\displaystyle\int_0^\pi F(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi G(t)\mathrm{d}t=0$.
Existence : Soit $\hat{F}$ une primitive de F, $C=\displaystyle\int_0^\pi\hat{F}(t)\mathrm{d}t$ et $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ définie par $F(t)=\hat{F}(t)-\dfrac{1}{\pi}C$.
F est, tout comme $\hat{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $F'(t)=\hat{F}'(t)=f(t)$ et $\displaystyle\int_0^\pi F(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi\hat{F}(t)\mathrm{d}t-C=0$.
Ainsi F est solution.

2.a $B_1(t)=t+C$ car B_1 est primitive de B_0 et $\displaystyle\int_0^\pi B_1(t)\mathrm{d}t=0$ donc $C=-\dfrac{1}{2}\pi$.
Ainsi $B_1(t)=t-\dfrac{1}{2}\pi$. De même, on obtient $B_2(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}\pi t+\dfrac{1}{12}\pi^2$.

2.b Pour tout $p\geq 2$, on a $\displaystyle\int_0^\pi B_{p-1}(t)\mathrm{d}t=0$ et $B_p'=B_{p-1}$ donc $\left[B_p(t)\right]_0^\pi=0$ puis $B_p(\pi)=B_p(0)$.

3.a La relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}=0$ équivaut à $\displaystyle p\beta_{p-1}+\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}=0$ soit encore $\displaystyle\beta_{p-1}=\frac{-1}{p}\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}$.
Ainsi, connaissant $\beta_0,\ldots,\beta_{p-2}$, on détermine β_{p-1}. Cela assure l'existence et l'unicité de $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Si l'on tient à être plus précis, on peut aussi écrire :
Unicité : Si deux suites $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_p')_{p\in\mathbb{N}}$, sont solutions, on montre par récurrence : $\forall p\in\mathbb{N}$, $\beta_p=\beta_p'$.
Existence : La suite $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par $\beta_0=1$ et $\forall p\in\mathbb{N}$ $\displaystyle\beta_{p+1}=\frac{-1}{p+2}\sum_{k=2}^{p+2}\binom{p+2}{k}\beta_{p+2-k}$ est solution.

3.b $\beta_0=1$, $\beta_1=-\dfrac{1}{2}$, $\beta_2=-\dfrac{1}{3}(3\beta_1+\beta_0)=\dfrac{1}{6}$, $\beta_3=-\dfrac{1}{4}(6\beta_2+4\beta_1+\beta_0)=0$ et
$\beta_4=-\dfrac{1}{5}(10\beta_3+10\beta_2+5\beta_1+\beta_0)=-\dfrac{1}{30}$.

4.a $\displaystyle\int_0^\pi\hat{B}_p(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}\pi^{p-k}\frac{\pi^{k+1}}{k+1}$ or $\displaystyle\frac{1}{k+1}\binom{p}{k}=\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{k+1}$ donc
$\displaystyle\int_0^\pi\hat{B}_p(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k+1}\beta_{p-k}=\frac{\pi^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{\ell=1}^{p+1}\binom{p+1}{\ell}\beta_{(p+1)-\ell}=0$.

$$\hat{B}_p'(t)=\frac{1}{p!}\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}\pi^{p-k}kt^{k-1}$$ or $k\binom{p}{k}=p\binom{p-1}{k-1}$ donc

$$\hat{B}_p'(t)=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=1}^{p}\binom{p-1}{k-1}\beta_{p-k}\pi^{p-k}t^{k-1}=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{p-1}{\ell}\beta_{p-1-\ell}\pi^{p-1-\ell}t^{\ell}=B_{p-1}(t)\,.$$

4.c Montrons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$ que $B_p=\hat{B}_p$.

Pour $p=0$, $\forall t\in[0,\pi]$, $B_0(t)=1$ et $\hat{B}_0(t)=1$: ok

Supposons la propriété établie au rang $p\geq 0$.

On a $B_{p+1}'=B_p$ avec $\int_0^{\pi}B_{p+1}(t)\mathrm{d}t=0$ et $\hat{B}_{p+1}'=\hat{B}_p$ avec $\int_0^{\pi}\hat{B}_{p+1}(t)\mathrm{d}t=0$

Or $B_p=\hat{B}_p$ donc par l'unicité présentée dans la question 1, $B_p=\hat{B}_p$.

Récurrence établie.

4.c $B_p(0)=\hat{B}_p(0)=\dfrac{\pi^p\beta_p}{p!}$.

Partie III

1. $$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{2ikt}\right)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2it}\frac{\mathrm{e}^{2int}-1}{\mathrm{e}^{2it}-1}\right)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(n+1)it}\frac{\mathrm{e}^{int}-\mathrm{e}^{-int}}{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-i}}\right)=\cos(n+1)t\frac{\sin nt}{\sin t}\,.$$

Or $\sin(2n+1)t-\sin t=\sin((n+1)t+nt)-\sin((n+1)t-nt)=2\cos(n+1)t\sin nt$

donc $\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)=\dfrac{\sin(2n+1)t-\sin t}{2\sin t}=\dfrac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}-\dfrac{1}{2}$ puis la relation voulue avec $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

2. $$\int_0^{\pi}f(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t=\left[-\frac{f(t)\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi}f'(t)\cos(2n+1)t\mathrm{d}t$$

or $\left|\left[-\dfrac{f(t)\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_0^{\pi}\right|\leq\dfrac{|f(0)|+|f(\pi)|}{2n+1}\to 0$ et

$$\left|\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi}f'(t)\cos(2n+1)t\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi}|f'(t)|\mathrm{d}t=\frac{C}{2n+1}\to 0$$

donc $\int_0^{\pi}f(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t\to 0$.

3.a $$I_{1,k}=\int_0^{\pi}B_2(t)\cos(2kt)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2k}B_2(t)\sin(2kt)\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2k}\int_0^{\pi}B_2'(t)\sin(2kt)\mathrm{d}t$$

donne $I_{1,k}=0-\dfrac{1}{2k}\int_0^{\pi}B_1(t)\sin(2kt)\mathrm{d}t=\left[\dfrac{1}{(2k)^2}B_1(t)\cos(2kt)\right]_0^{\pi}-\dfrac{1}{(2k)^2}\int_0^{\pi}B_1'(t)\cos(2kt)\mathrm{d}t$

puis $I_{1,k}=\dfrac{B_1(\pi)-B_1(0)}{(2k)^2}-\dfrac{1}{(2k)^2}\int_0^{\pi}\cos(2kt)\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{(2k)^2}$

3.b $$I_{p,k}=\int_0^{\pi}B_{2p}(t)\cos(2kt)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2k}B_{2p}(t)\sin(2kt)\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2k}\int_0^{\pi}B_{2p}'(t)\sin(2kt)\mathrm{d}t$$

donne $I_{p,k}=-\dfrac{1}{2k}\int_0^{\pi}B_{2p-1}(t)\sin(2kt)\mathrm{d}t=\left[\dfrac{1}{(2k)^2}B_{2p-1}(t)\cos(2kt)\right]_0^{\pi}-\dfrac{1}{(2k)^2}\int_0^{\pi}B_{2p-1}'(t)\cos(2kt)\mathrm{d}t$

puis $I_{p,k}=\dfrac{B_{2p-1}(1)-B_{2p-1}(0)}{(2k)^2}-\dfrac{1}{(2k)^2}\int_0^{\pi}B_{2p-2}(t)\cos(2kt)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{(2k)^2}I_{p-1,k}$

3.c $$I_{p,k}=-\frac{1}{(2k)^2}I_{p-1,k}=\frac{1}{(2k)^4}I_{p-2,k}=\frac{(-1)^{p-1}}{(2k)^{2(p-1)}}I_{1,k}=\frac{(-1)^{p-1}\pi}{(2k)^{2p}}\,.$$

4.a $\int_0^{\pi}\varphi_p(t)\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left(B_{2p}(t)-B_{2p}(0)\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t$

or $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}=2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)+1$

donc $\int_0^{\pi}\varphi_p(t)\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left(B_{2p}(t)-B_{2p}(0)\right)\left(2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)+1\right)\mathrm{d}t$

mais $\int_0^{\pi}B_{2p}(t)\mathrm{d}t=0$ et $\int_0^{\pi}B_{2p}(0)\cos(2kt)\mathrm{d}t=0$ donc

$\int_0^{\pi}\varphi_p(t)\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t=2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}B_{2p}(t)\cos(2kt)\mathrm{d}t-\pi B_{2p}(0)=2\sum_{k=1}^{n}I_{p,k}-\pi B_{2p}(0)$

donc $\int_0^{\pi}\varphi_p(t)\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}\pi}{2^{2p-1}k^{2p}}-\pi B_{2p}(0)$.

4.b Quand $n\to+\infty$, $\int_0^{\pi}\varphi_p(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t\to 0$ compte tenu de III.2 car φ_p est $\mathcal{C}^1$.

Par suite $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p-1}k^{2p}}=B_{2p}(0)$ puis $\zeta(2p)=(-1)^{p-1}2^{2p-1}B_{2p}(0)$.

5. $B_2(0)=\frac{\pi^2\beta_2}{2!}=\frac{\pi^2}{12}$ et donc $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

$B_4(0)=\frac{\pi^4\beta_4}{4!}=-\frac{\pi^4}{720}$ et donc $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$.

Partie IV

1.a $f_n(x)=\frac{1}{n!}x^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n+k}=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}e_ix^i$ avec $e_i=(-1)^{n-i}\binom{n}{n-i}\in\mathbb{Z}$.

1.b $\forall 0\le k<n$, $f_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}e_i\frac{i!}{(i-k)!}x^{i-k}$ et $f_n^{(k)}(0)=0\in\mathbb{Z}$.

$\forall n\le k\le 2n$, $f_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=k}^{2n}e_i\frac{i!}{(i-k)!}x^{i-k}$ et $f_n^{(k)}(0)=\frac{1}{n!}e_kk!=k(k-1)\ldots(n+1)e_k\in\mathbb{Z}$.

$\forall k>2n$, $f_n^{(k)}(x)=0$ et $f_n^{(k)}(0)=0\in\mathbb{Z}$.

1.c Puisque $f_n(x)=f_n(1-x)$, on a $f_n'(x)=-f_n'(1-x)$ et plus généralement $f_n^{(k)}(x)=(-1)^kf_n^{(k)}(1-x)$.
Par suite $f_n^{(k)}(1)=(-1)^kf_n^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}$.

2.a $F_n(0)=b^n\left(\pi^{2n}f_n(0)-\pi^{2n-2}f_n^{(2)}(0)+\cdots+(-1)^nf_n^{(2n}(0)\right)$

or pour tout $k\in\{0,\ldots,n\}$, $b^n\pi^{2n-2k}=a^{2n-2k}b^{2k}\in\mathbb{Z}$ et $f_n^{(2k)}(0)\in\mathbb{Z}$ donc $F_n(0)\in\mathbb{Z}$

Idem pour $F_n(1)$.

2.b $g_n'(x)=F_n''(x)\sin(\pi x)+\pi^2F_n(x)\sin(\pi x)$

or $F_n''(x)+\pi^2F_n(x)=b^n\pi^{2n+2}f_n(x)$ après simplification et sachant $f_n^{(2n+2)}(x)=0$

donc $g_n'(x)=\pi^2a^nf_n(x)\sin(\pi x)$ comme voulu.

2.c $A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^1 g_n'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(g_n(1)-g_n(0)\right)=F_n(0)+F_n(1)\in\mathbb{Z}$.

3.a Pour $n>E(a)$, $0\le u_n=\frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{E(a)}\underbrace{\frac{a}{E(a)+1}\cdots\frac{a}{n}}_{\le 1}\le\frac{a}{1}\cdots\frac{a}{E(a)}\frac{a}{n}=\frac{C}{n}\to 0$.

Par suite $u_n\to 0$ et donc, à partir d'un certain rang $u_n<\frac{1}{2}$.

3.b Pour tout $x \in [0,1]$, $x^n(1-x)^n \in [0,1]$ car $x^n, (1-x)^n \in [0,1]$.

Par suite $f_n(x) = \dfrac{1}{n!} x^n (1-x)^n \in [0, 1/n!]$.

3.c La fonction $x \mapsto a^n f_n(x) \sin \pi x$ est continue, positive sans être la fonction nulle donc $A_n > 0$.

Pour $n \geq n_0$, $A_n < \pi \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2} n! f_n(x) \sin(\pi x) \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} \pi \int_0^1 \sin(\pi x) \mathrm{d}x = 1$ donc $A_n \in]0,1[$.

C'est absurde car $A_n \in \mathbb{Z}$. Par suite π^2 est irrationnel.

3.d Si π est rationnel alors π^2 l'est aussi, or ceci est faux donc π est irrationnel.