Correction

Partie I

1. Supposons que le produit (p_n) converge et posons $\ell = \lim p_n$. On a $\ell \neq 0$, $p_n \to \ell$ et $p_{n+1} \to \ell$ donc par opérations sur les limites $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \to \dfrac{\ell}{\ell}$ i.e. $u_{n+1} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre facilement $p_n = n+1$.
   On peut aussi observer : $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \frac{p+1}{p} = \frac{2\times\cdots\times(n+1)}{1\times\cdots\times n} = n+1$.
   On a $p_n \to +\infty$ donc (p_n) diverge.

3. $p_n \sin\dfrac{a}{2^n} = \left(\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{4}\cdots\cos\dfrac{a}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\dfrac{a}{2^n}\sin\dfrac{a}{2^n}\right) \underset{\sin 2a = 2\sin a\cos a}{=} \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{4}\cdots\cos\dfrac{a}{2^{n-1}}\right)\sin\dfrac{a}{2^{n-1}}$
   En reprenant ce processus : $p_n \sin\dfrac{a}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2^n}\sin a$.
   $p_n = \dfrac{\sin a}{2^n \sin\dfrac{a}{2^n}} \sim \dfrac{\sin a}{2^n \dfrac{a}{2^n}} = \dfrac{\sin a}{a} \neq 0$ donc le produit (p_n) converge et $\lim p_n = \dfrac{\sin a}{a}$.

Partie II

1.a Puisque $u_n \to 1$, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 1| \leq \varepsilon$.
En prenant $\varepsilon = 1/2$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - 1| \leq 1/2$ donc $u_n \geq 1/2 > 0$.

1.b $S_n = \ln\left(\displaystyle\prod_{p=n_0}^{n} u_p\right) = \ln \frac{p_n}{p_{n_0-1}}$.
Si le produit (p_n) converge alors, puisque la suite (p_n) tend vers une limite finie non nulle, le rapport $\dfrac{p_n}{p_{n_0-1}}$ tend vers une limite finie strictement positive. Par composition de limites, la suite (S_n) converge.
Si la suite (S_n) converge vers ℓ alors $\dfrac{p_n}{p_{n_0-1}} = \mathrm{e}^{S_n} \to \mathrm{e}^{\ell}$ donc $p_n \to p_{n_0-1}\mathrm{e}^{\ell} \neq 0$ donc le produit (p_n) converge.

2.a $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ donc la suite (H_n) est croissante.
$H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
Puisque (H_n) est croissante, soit cette suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, soit cette suite diverge vers $+\infty$.
Or, si $H_n \to \ell \in \mathbb{R}$ alors $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$ donne à la limite $\ell - \ell = 0 \geq \dfrac{1}{2}$ ce qui est absurde.
Donc, nécessairement $H_n \to +\infty$.

2.b Pour $p \geq 3$, on a $\dfrac{\ln p}{p} \geq \dfrac{1}{p}$ donc $S_n - S_2 \geq H_n - H_2$ d'où $S_n \geq H_n - H_2 + S_2 \to +\infty$.
Par comparaison, $S_n \to +\infty$. Par suite (S_n) et (p_n) divergent.

Partie III

1.a Etudions $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \subset]-1,+\infty[$.

f est dérivable et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite f est croissante et puisque $f(0) = 0$, f est positive d'où l'inégalité voulue.

1.b $S'_{n+1} - S'_n = v_{n+1} \geq 0$ donc (S'_n) est croissante.

1.c Supposons que (S'_n) converge vers un réel ℓ. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, S'_n \leq \ell$.

$$\ln(p_n) = \ln \prod_{p=1}^{n} (1+v_p) = \sum_{p=1}^{n} \ln(1+v_p) \underset{\ln(1+x)\leq x}{\leq} \sum_{p=1}^{n} v_p = S'_n \leq \ell .$$

La suite $(\ln p_n)$ est donc majorée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln p_{n+1} - \ln p_n = \ln \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \ln(1+v_{n+1}) \geq 0$ donc $(\ln p_n)$ est une suite croissante.

Etant croissante et majorée, la suite $(\ln p_n)$ converge vers un réel m et par opérations $p_n \to \mathrm{e}^m \neq 0$.

Par suite le produit (p_n) converge.

Notons, qu'on peut aussi reprendre le résultat de la question II.1 avec $n_0 = 1$ et en observant $S_n \leq S'_n$.

2.a Si $a \geq 1$ alors $p_n \geq \prod_{p=1}^{n} 2 = 2^n \to +\infty$ et donc le produit (p_n) diverge.

2.b On reprend les notations de la question III.1 à partir de $v_p = a^{2^p}$.

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} a^{2^p} \leq \sum_{k=1}^{2^n} a^k = a\frac{1-a^{2^n}}{1-a} \leq \frac{a}{1-a}$$

La suite (S'_n) est croissante et majorée donc elle converge et par suite le produit (p_n) aussi.

2.c $(1-a^2)p_n = \left((1-a^2)(1+a^2)\right)\left((1+a^4)\ldots(1+a^{2^n})\right) = (1-a^4)\left((1+a^4)\ldots(1+a^{2^n})\right)$.

En réitérant le processus : $(1-a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$. Par suite $p_n \to \dfrac{1}{1-a^2}$.