Courbes de Bézier

Le problème est consacré à l'étude des courbes dites « courbes de Bézier », du nom de l'ingénieur français Bézier, l'un des créateurs, dans les années 1960, de cet outil très répandu aujourd'hui dans l'industrie automobile et plus généralement dans le vaste de domaine d'applications que constitue la conception assistée pas ordinateurs (CAO).

Notations utilisées dans le problème

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entier naturels, $\mathbb{R}$ le corps des réels. Les notations usuelles en découlent pour les ensembles construits à partir de ceux-là. Par exemple, $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, etc.

Dans tout le problème, le plan vectoriel R^2 est muni de la base canonique $(\vec{i},\vec{j})$:

$$\begin{cases} \vec{i} = (1,0) \\ \vec{j} = (0,1) \end{cases}$$

Chaque vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ s'identifie ainsi au couple de ses coordonnées dans la base canonique.
Un point de vue différent mais cohérent avec ce qui précède permet que les éléments de $\mathbb{R}^2$ soient parfois appelés *points*, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ étant alors muni de sa structure de plan affine et repéré par le repère canonique $(O;\vec{i},\vec{j})$, où $O=(0,0)$. Tout point du plan s'identifie alors au couple de ses coordonnées dans ce repère. On pourra ainsi écrire simplement :

$$M = (x,y)$$

pour exprimer que les coordonnées du point M dans le repère canonique sont (x,y).

Etant donnés deux points M et N, on posera $N - M = \overrightarrow{MN}$. Cette écriture est cohérente avec les conventions précédentes, comme le montre la relation existant entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ et celles des points M et N.
De façon équivalente, on pourra écrire :

$$N = M + \overrightarrow{MN}$$

Plus généralement, si n désigne un entier naturel non nul, $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ une famille de n scalaires et $(P_1,...,P_n)$ une famille de n points, l'expression

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_n P_n$$

désignera le point (ou, selon le contexte, le vecteur) dont les coordonnées sont données conformément à cette expression.

En particulier, si le n-uplet $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ vérifie $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, l'expression $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_n P_n$ désigne le barycentre des points $(P_1,...,P_n)$ affectés respectivement des poids $(\lambda_1,...,\lambda_n)$.

Le candidat remarquera qu'avec ces conventions, la propriété d'*associativité du barycentre* s'exprime d'une façon très simple et naturelle.

Pour tout entier n, on note E_n l'ensemble des n-uplets de points du plan.
Autrement dit, $E_n = (\mathbb{R}^2)^n$.

On ne fera pas de différence entre E_1 et le plan $\mathbb{R}^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(P_0,...,P_n) \in E_{n+1}$ on définit un arc paramétré $B_n(P_0,\dots,P_n) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

1) Pour $P \in E_1$ on pose $B_0(P)$ l'arc paramétré constant (de trajectoire réduite à un point) :

$$B_0(P) : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto P \end{array}$$

2) Pour tout $n \geq 1$ et tout $(P_0, P_1, ..., P_n) \in E_{n+1}$ on définit l'arc paramétré $B_n(P_0, \dots, P_n) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ par la relation :

$$\forall t \in [0,1], B_n(P_0, P_1, \dots, P_n)(t) = (1-t)B_{n-1}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})(t) + tB_{n-1}(P_1, \dots, P_n)(t) .$$

L'arc paramétré :

$$B_n(P_0, \dots, P_n) : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto B_n(P_0, \dots, P_n)(t) \end{array}$$

est appelé le *courbe de Bézier associée aux* $(n+1)$ *pôles* $P_0, P_1, \dots, P_n$.

Afin d'alléger la notation, pour toute famille $F \in E_{n+1}$, la courbe de Bézier associée aux $(n+1)$ pôles F sera le plus souvent notée $B_{n,F}$ parfois même B_F.

De façon générale, et sauf mention explicite du contraire dans l'énoncé, on ne fera pas appel aux coordonnées des points.

Partie I

1. Cas $n = 1$.
Soit $F = (P_0, P_1) \in E_2$.

1.a Exprimer, en fonction du paramètre t et des points P_0 et P_1, le point courant de la courbe de Bézier associée à la famille F, c'est à dire $B_{1,F}(t)$.

1.b Quelle est la trajectoire de l'arc paramétré $B_{1,F}$?

2. Cas $n = 2$.
Soit $F = (P_0, P_1, P_2) \in E_3$.

2.a Déterminer $B_F(0)$ et $B_F(1)$.

2.b Soit, pour $i \in \{0,1\}$, Q_i le milieu de P_i et P_{i+1}.
Montrer que $B_F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est le milieu de Q_0 et Q_1.

2.c Exprimer en fonction de t, le point courant $B_F(t)$ comme barycentre des trois pôles P_0, P_1 et P_2 avec des coefficients dont la somme fait 1.

2.d On suppose $P_0 = (-1,1)$, $P_1 = (0,0)$ et $P_2 = (1,1)$.
Exprimer les coordonnées $(x(t), y(t))$ du point $B_F(t)$.
Montrer que la trajectoire de l'arc B_F est incluse dans une parabole dont on précisera l'équation.
Tracer la trajectoire de B_F (on prendra $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé avec unité de longueur de 4 cm).

Partie II

On rappelle qu'une partie non vide K du plan est convexe ssi $\forall (M,N) \in K^2, \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)M + \lambda N \in K$.

1. Montrer qu'une partie non vide du plan est convexe ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (M_1, \dots, M_n) \in K^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathrm{R}_+)^n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_k \in K .$$

2. Soit E une partie non vide du plan, et soit W l'ensemble des parties convexes du plan contenant E.

2.a Montrer que l'intersection de tous les convexes appartenant à W, c'est à dire $\bigcap\limits_{K \in W} K$, est un convexe contenant E.
Dans la suite, pour tout partie non vide E du plan, on note $C(E)$ l'enveloppe convexe de E, c'est à dire l'intersection de toutes les parties convexes du plan contenant E.

2.b Soit E une partie non vide du plan. Montrer l'équivalence :

$$E \text{ convexe } \Leftrightarrow \ E = C(E).$$

2.c Soient G et H deux parties non vides du plan. Prouver l'implication

$$(G \subset H) \Rightarrow (C(G) \subset C(H)).$$

2.d Soit E une partie non vide du plan. Montrer que :

$$C(E) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (M_1, \ldots, M_n) \in E^n, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \text{ et } M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_k \right\}$$

Dans la suite, pour tout entier naturel n, et toute famille de points $F \in E_n$, on notera encore $C(F)$ l'enveloppe convexe des points formant la famille F.

3. Démontrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n et toute famille $F \in E_{n+1}$, la trajectoire de $B_{n,F}$ est incluse dans $C(F)$.

Partie III

1. *Fonctions de Mélange*

1.a Démontrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, il existe $n+1$ fonctions polynômes $b_{n,k} : [0,1] \to \mathrm{R}$, de degré inférieur ou égal à n, telles que, pour toute famille $F = (P_0, ..., P_n) \in E_{n+1}$, on ait

$$B_{n,F}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) P_k .$$

On ne chercha pas dans cette question III.1.a à exprimer explicitement les fonctions $b_{n,k}$ (appelées fonctions de mélange).

Au cours de la démonstration demandée, le candidat mettra en évidence la relation entre $b_{n+1,k}, b_{n,k}$ et $b_{n,k-1}$ vérifiée lorsque $1 \le k \le n$, ainsi que la relation entre $b_{n+1,0}$ et $b_{n,0}$, et celle qui a lieu entre $b_{n+1,n+1}$ et $b_{n,n}$.

1.b Dresser un tableau ou vous exprimerez sous forme factorisée les polynômes $B_{n,k}(t)$ pour $0 \le n \le 3$ et $0 \le k \le n$.

1.c Déterminer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, une formule simple exprimant $b_{n,k}(t)$ en fonction de t, de n et de k.

2. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

$$I_{n,k} = \int_0^1 b_{n,k}(t) dt .$$

2.a Déterminer $\sum_{k=0}^{n} I_{n,k}$.

2.b Déterminer, en fonction de n et k, la valeur de $I_{n,k}$ (on pourra faire une intégration par parties).

Partie IV

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = (P_0, \ldots, P_n) \in E_{n+1}$.

On se propose ici, d'étudier quelques propriétés géométriques de l'arc $B_{n,F}$.

Pour cela on exploitera judicieusement la relation

$$B_{n,F}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) P_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k P_k$$

qui a été établie dans la partie III.

1.a Déterminer $B_{n,F}(0)$ et $B_{n,F}(1)$.

1.b Exprimer le vecteur $\frac{d}{dt} B_{n,F}(t)$.

1.c On suppose ici les pôles P_i deux à deux distincts.
Déterminer la droite tangente à la trajectoire de $B_{n,F}$ au point de paramètre $t=0$.
Même question en $t=1$.

2. Soit φ une transformation affine du plan.
Démontrer que pour tout entier naturel n et toute famille $F \in E_{n+1}$, on a :

$$\forall t \in [0,1],\ \varphi(B_{n,F}(t)) = B_{n,\varphi(F)}(t),$$

où $\varphi(F)$ désigne la famille obtenue en appliquant φ à chacun des points de la famille F.

3. On note $\tilde{F}$ la famille obtenue à partie de F en inversant l'ordre des pôles : $\tilde{F} = (P_n, P_{n-1}, \dots, P_0) \in E_{n+1}$.

3.a Quelle relation a-t-on entre $B_{n,\tilde{F}}$ et $B_{n,F}$?

3.b Comparer les trajectoires respectives de $B_{n,\tilde{F}}$ et de $B_{n,F}$.

4. Soit Ω un point du plan $\mathbb{R}^2$ et s la symétrie de centre Ω.
On suppose que $P_n = s(P_0), P_{n-1} = s(P_1), \dots, P_0 = s(P_n)$.

4.a Quelle propriété géométrique possède la trajectoire de $B_{n,F}$?

4.b Le point Ω appartient-il alors à cette trajectoire ?

5. Pour finir on prend $n=3, P_0=(-1,0), P_1=(0,2), P_2=(0,-2)$ et $P_3=(1,0)$.
Tracer la courbe de Bézier associée à la famille de points (P_0, P_1, P_2, P_3).
Le tracé s'appuiera en particulier sur les tangentes à la courbe aux points de paramètre $t \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ et sera réalisé relativement à un repère orthonormé où l'unité de longueur sera de 2 cm.