Correction

d'après Ecole de l'Air 2002

Partie I

1.a C a pour équation cartésienne : $x^2+y^2+2ax=0$.

1.b $H(t)\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ avec $x=2a$ et $y=tx$ donc $H(t)\left|\begin{matrix}2a\\2ta\end{matrix}\right.$,

$M(t)\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ avec $x^2+y^2+2ax=0$ et $y=tx$ donc $M(t)\left|\begin{matrix}-\dfrac{2a}{1+t^2}\\-\dfrac{2at}{1+t^2}\end{matrix}\right.$ sachant $M(t)\neq O$,

$I(t)$ est le milieu du segment $[H(t)M(t)]$ donc $I(t)\left|\begin{matrix}\dfrac{at^2}{1+t^2}\\\dfrac{at^3}{1+t^2}\end{matrix}\right.$.

2.a $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$ donc $I(-t)$ et $I(t)$ sont symétriques par rapport à (Ox).

$x'(t)=\dfrac{2at}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t)=a\dfrac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	a
$y'(t)$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$m(t)$	?	$+$	

2.b Le point de paramètre $I(0)=O$ est singulier.

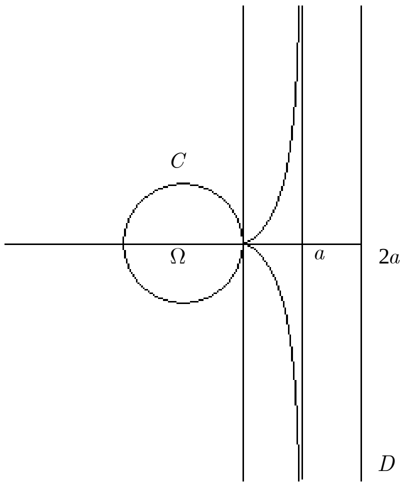
$$\begin{cases}x''(t)=2a\dfrac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}\\ y''(t)=2a\dfrac{t(3-t^2)}{(1+t^2)^3}\end{cases}\text{ donc }\begin{cases}x''(0)=2a\\ y''(0)=0\end{cases}$$

L'axe (Ox) est tangent à la courbe au point $I(0)=O$.
En vertu de la symétrie par rapport à (Ox) on peut assurer
qu'il s'agit d'un point de rebroussement à tangente horizontale.

2.c Pour $t_0=0$, la tangente en $J(t_0)=O$ est horizontale et l'équation proposée est convenable.
Pour $t_0\neq 0$, la tangente en $J(t_0)$ est dirigée par le vecteur vitesse.
Le reste est du calcul avec à un moment une simplification par at_0 d'où la nécessité de traiter le cas $t_0=0$ à part.

2.d $\rightarrow$donc la droite d'équation $x=a$ est asymptote à Γ en $+\infty$, courbe à gauche.

3.



4. $x(t)=\dfrac{at^2}{1+t^2}, y(t)=tx(t)$ donc $x(t)=\dfrac{a\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)^2}{1+\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)^2}=\dfrac{a\big(y(t)\big)^2}{\big(x(t)\big)^2+\big(y(t)\big)^2}$.

Soit $\tilde\Gamma$ la courbe d'équation cartésienne : $x(x^2+y^2)=ay^2$.

Par l'étude ci-dessus : $\Gamma\subset\tilde\Gamma$.

Inversement, soit $M(x,y)\in\tilde\Gamma$.

Si $x=0$ alors $y=0$ (en vertu de l'équation) et donc $M=O=J(0)$.

Si $x\neq 0$ alors posons $t=\dfrac{y}{x}$. La relation $x=\dfrac{ay^2}{x^2+y^2}$ donne $x=x(t)$ et $y=tx$ donne $y=y(t)$. Par suite $M=J(t)$.

Dans les deux cas : $M\in\Gamma$. Ainsi $\tilde\Gamma\subset\Gamma$ puis $\Gamma=\tilde\Gamma$.

Finalement $x(x^2+y^2)=ay^2$ est une équation cartésienne de Γ.

Partie II

1.a Soit M de coordonnées polaires (ρ,θ).

$M\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\rho\cos\theta=2a$ donc D a pour équation polaire $\rho=\dfrac{2a}{\cos\theta}$.

$M\in C\Leftrightarrow\Omega M^2=(2a)^2$. Or $\Omega M^2=\Omega O^2-2(\overrightarrow{O\Omega}\mid\overrightarrow{OM})+OM^2=(2a)^2+4a\rho\cos\theta+\rho^2$.

donc $M\in C\Leftrightarrow\rho^2+4a\rho\cos\theta=0\Leftrightarrow\rho+4a\cos\theta=0$ ou $\rho=0$

Soit C' la courbe d'équation polaire : $\rho+4a\cos\theta=0$.

Par l'équivalence ci-dessus : $C=C'\cup\{O\}$.

Or $O\in C'$ puisque pour $\theta=\dfrac{\pi}{2},\rho=-4a\cos\theta=0$ donc $C=C'$.

Finalement C a pour équation polaire : $\rho+4a\cos\theta=0$. On peut aussi exploiter une formule du cours.

1.b $H(\theta)\in D$ donc $H(\theta)$ a pour coordonnées polaires : $\dfrac{2a}{\cos\theta},\theta$, pour $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$M(\theta)\in C$ donc $M(\theta)$ a pour coordonnées polaires : $-4a\cos\theta,\theta$, pour $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou non.

$I(\theta)$ étant le milieu de $[M(\theta),H(\theta)]$, ce point a pour coordonnées polaires ρ,θ avec

$\rho=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{\cos\theta}-4a\cos\theta\right)=\dfrac{a(1-2\cos^2\theta)}{\cos\theta}=-a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

2.a $r(\theta+2\pi)=r(\theta)$ donc $I(\theta+2\pi)=I(\theta)$.

$r(\theta+\pi)=-r(\theta)$ donc $I(\theta+\pi)=I(\theta)$.

$r(-\theta)=r(\theta)$ donc $I(-\theta)$ est le symétrique de $I(\theta)$ par rapport à l'axe (Ox).

Il suffit d'étudier la courbe sur $[0,\pi/2[$ pour, en complétant par la symétrie précédente, obtenir l'intégralité de courbe étudiée.

2.b r est $\mathcal{C}^\infty$ et $r'(\theta)=-a\dfrac{-2\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=a\dfrac{\sin\theta(2\cos^2\theta+1)}{\cos^2\theta}\geq 0$.

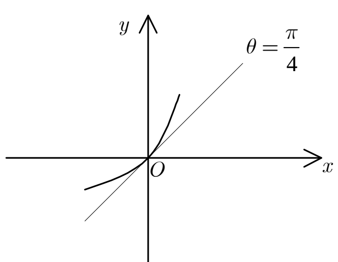
θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$r(\theta)$	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

donc

θ		$\pi/4$	
$r(\theta)$	$-$	0	$+$

.

L'allure de la courbe en ce point est ci-contre :

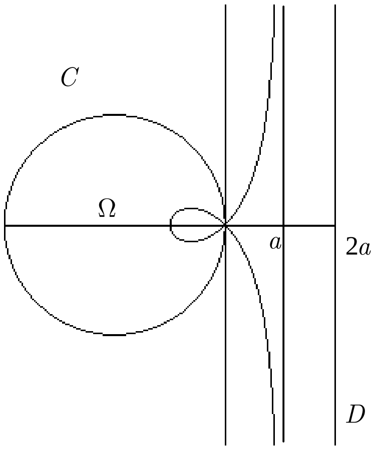


2.c Quand $\theta \to \frac{\pi}{2}^-$, on a $r(\theta) \to +\infty$ donc la courbe présente une branche infinie de direction $\theta = \pi/2$ i.e. $x = 0$.

$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta = -a\cos 2\theta \xrightarrow[\theta\to\pi/2]{} a^-$.

La droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe quand $\theta \to \pi/2$, courbe à gauche.

3. Courbe est ci-contre :



4. On a $r(\theta)\cos\theta + a\cos 2\theta = 0$ donc $r^3(\theta)\cos\theta + ar^2(\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$ donc en posant $x = r(\theta)\cos\theta$ et $y = r(\theta)\sin\theta$ on a $(x^2+y^2)x + a(x^2-y^2) = 0$.

Soit $\tilde{\Gamma}'$ la courbe d'équation cartésienne $(x^2+y^2)x + a(x^2-y^2) = 0$.

Par ce qui précède, on a $\Gamma' \subset \tilde{\Gamma}'$.

Inversement, soit $M(x,y) \in \tilde{\Gamma}'$.

Il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

L'équation $(x^2+y^2)x + a(x^2-y^2) = 0$ donner alors $r^3\cos\theta + ar^2\cos 2\theta = 0$ d'où $r = 0$ ou $r = -\dfrac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

Si $r = 0$ alors $M = O = I(\pi/4) \in \Gamma'$.

Si $r = -\dfrac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$ alors $M = I(\theta) \in \Gamma'$.

Dans les deux cas : $M \in \Gamma'$. Ainsi $\tilde{\Gamma}' \subset \Gamma'$ puis $\Gamma' = \tilde{\Gamma}'$.

Finalement $(x^2+y^2)x + a(x^2-y^2) = 0$ est une équation cartésienne de Γ.