Correction

1.a $2a+1=\sqrt{5}$ donc $4a^2+4a+1=5$ d'où a solution de l'équation $a^2+a-1=0$.
On a alors $1/b^2+1/b-1=0$ d'où $b^2-b-1=0$.

1.b $b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $ab=1$, $a+b=\sqrt{5}$, $b-a=1$ et $a^2+b^2=1-a+1+b=3$.

2. Si $M(x,y,z)$ alors le projeté H de M sur $(O;\vec{i})$ est le point de coordonnées $(x,0,0)$. En effet ce point appartient à la droite $(O;\vec{i})$ et on vérifie que le vecteur $\overrightarrow{HM}(0,y,z)$ est orthogonale à la droite $(O;\vec{i})$.
Par suite M' a pour coordonnées x',y',z' avec $\dfrac{x+x'}{2}=x, \dfrac{y+y'}{2}=0, \dfrac{z+z'}{2}=0$ et donc $x'=x$, $y'=-y$ et $z'=-z$. Finalement $M'(x,-y,-z)$. De même $M''(-x,y,-z)$ et $M'''(-x,-y,z)$.

3.a On a $JA^2=(a-1)^2+1+(b'-1)^2=JD^2$ donc $JA=JD=2a \Leftrightarrow (a-1)^2+1+(b'-1)^2=4a^2$ ce qui équivaut encore à $b'^2-2b'-(3a^2+2a-3)=0$ puis à $b'^2-2b'+a=0$ qui a pour solution $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=b$. La seule qui soit strictement supérieure à 1 est b. Le problème posé ne possède donc qu'une solution obtenue pour $b'=b$.

3.b $J(a,0,b)$, $I(-a,0,b)$, $J'(-a,0,-b)$ et $I'(a,0,-b)$.

4. Par le demi-tour $K(x,y,z)$, $L(x,-y,-z)$. La relation $\overrightarrow{KL}=2a\vec{j}$ donne alors $y=-a$ et $z=0$.
La relation $KB'=KD=2a$ donne alors $(x+1)^2+(a-1)^2+1=4a^2$ qui conduit comme ci-dessus à l'équation $x^2-2x+a=0$ et on conclut $x=b$ sachant $x>1$.
Ainsi $K(b,-a,0)$, $L(b,a,0)$, $K'(-b,a,0)$ et $L'(-b,-a,0)$.
De même $N(0,b,a)$, $M(0,b,-a)$, $N'(0,-b,-a)$ et $M'(0,-b,a)$.

5.a $\overrightarrow{AJ}(a-1,0,b-1)$, $\overrightarrow{AD}(0,-1,0)$ et $(\overrightarrow{AJ}\wedge\overrightarrow{AD})(b-1,0,1-a)$.
A,J,D ne sont pas alignés et l'équation du plan (AJD) est $(b-1)x+(1-a)z=1$.
Or $(b-1)b=b^2-b=1$ donc $K\in(AJD)$ et de même $L\in(AJD)$.

5.b On procède de même, une équation du plan est ici $(1-a)y+(b-1)z=1$.

5.c $AJ^2=(a-1)^2+(b-1)^2+1=(a^2+b^2)-2(a+b)+3=6-2\sqrt{5}$.
$JD^2=(a-1)^2+(b-1)^2+1=6-2\sqrt{5}$, $DK^2=(b-1)^2+(a-1)^2+1=6-2\sqrt{5}$,
$KL^2=(2a)^2=(-1+\sqrt{5})^2=6-2\sqrt{5}$ et $LA^2=(b-1)^2+(a-1)^2+1=6-2\sqrt{5}$.
Ainsi les distances AJ,JD,DK,KL et LA sont toutes égales à $d=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$.

6.a $\Omega((a+2b+2)/5,0,(2+b)/5)$ avec $\dfrac{a+2b+2}{5}=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}$ et $\dfrac{2+b}{5}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$.

6.b $\Omega A^2=\left(\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)^2+1+\left(\dfrac{-5+\sqrt{5}}{10}\right)^2=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{5}$,
$\Omega J^2=\left(\dfrac{10-2\sqrt{5}}{10}\right)^2+0^2+\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{10}\right)^2=2-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$, $\Omega D^2=\Omega A^2$,
$\Omega K^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{10}\right)^2+\left(\dfrac{-5+5\sqrt{5}}{10}\right)^2+\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^2=2-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}=\Omega L^2$.
Ainsi les distances $\Omega A,\Omega J,\Omega D,\Omega K,\Omega L$ sont toutes égales à $r=\sqrt{2-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}}$.

6.c $d^2=6-2\sqrt{5}$ et $\left(\dfrac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2=\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)=\dfrac{60-20\sqrt{5}}{10}=6-2\sqrt{5}$.