Correction

Partie I

1. f est endomorphisme de E : immédiat
Montrons f antisymétrique : $\forall x, y \in E$,
$(f(x) \mid y) = (u \wedge x \mid y) = \mathrm{Det}(u, x, y) = -\mathrm{Det}(u, y, x) = -(u \wedge y \mid x) = -(f(x) \mid y)$

2. Soit $x \in E$: $x \in \ker f \Leftrightarrow x$ et u sont colinéaires.
Sachant $u \neq 0$, cela équivaut $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda . u$.
Ainsi $\ker f = \mathrm{Vect}(u)$.
On a $\forall x \in E, f(x) = u \wedge x \in \{u\}^{\perp}$ donc $\mathrm{Im} f \subset \{u\}^{\perp}$.
De plus $\dim \{u\}^{\perp} = 2$ et par le théorème du rang $\dim \mathrm{Im} f = 2$.
Donc $\mathrm{Im} f = \{u\}^{\perp}$.

3. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est antisymétrique.

Partie II

1. (i) $\Rightarrow$ (ii) :
Supposons f que est antisymétrique, considérons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et formons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})$.
$\forall 1 \leq i, j \leq n$, $a_{i,j}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}$.
Donc $a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j))$.
Sachant f antisymétrique :
$a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j)) = -(f(e_i) \mid e_j) = -a_{j,i}$,
donc A est antisymétrique.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) :
Supposons que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ soit antisymétrique. Notons A celle-ci.
Pour tout $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.
Nous savons $AX = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x))$.
$(f(x) \mid x) = {}^t(AX)X = {}^tX\,{}^tAX = -{}^tXAX = -{}^tX(AX) = -(x \mid f(x))$
Donc $(f(x) \mid x) = 0$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) :
Supposons $\forall x \in E, (f(x) \mid x) = 0$.
Pour tout $x, y \in E$ on a $(f(x+y) \mid x+y) = 0$.
Or
$(f(x+y) \mid x+y) = (f(x) \mid x) + (f(x) \mid y) + (f(y) \mid x) + (f(y) \mid y) = (f(x) \mid y) + (f(y) \mid x)$
donc $(f(x) \mid y) + (f(y) \mid x) = 0$.

2.a Montrons que $A(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
$A(E) \subset \mathcal{L}(E)$.
L'endomorphisme nul est antisymétrique.
Soit $f, g \in A(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in E$:
$((\lambda f + \mu g)(x) \mid y) = \lambda(f(x) \mid y) + \mu(g(x) \mid y) = -\lambda(x \mid f(y)) - \mu(x \mid g(y)) = -(x \mid (\lambda f + \mu g)(y))$
Donc $\lambda f + \mu g \in A(E)$.
Finalement $A(E)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

2.b Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

Par la question II.1, on peut affirmer que l'application $\varphi : A(E) \mapsto A_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Donc $\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3.a Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Comme ${}^tA = -A$ on a $\det A = (-1)^n \det A$ d'où $\det f = (-1)^n \det f$.

Si n est impair, f n'est pas un isomorphisme.

3.b Soit $x \in \ker f$ et $y = f(u) \in \operatorname{Im} f$.

On a $(x \mid y) = (x \mid f(u)) = -(f(x) \mid u) = 0$ car $f(x) = 0$.

Donc $\operatorname{Im} f \subset (\ker f)^\perp$.

De plus $\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \ker f = \dim (\ker f)^\perp$.

3.c Notons $g : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f$ la restriction de f à $\operatorname{Im} f$.

g est un endomorphisme de $\operatorname{Im} f$ car restriction de l'endomorphisme f et g est antisymétrique car la propriété de définition est conservée par restriction.

Etudions l'injectivité de g. Soit $x \in \operatorname{Im} f$

On a $x \in \ker g$ ssi $g(x) = 0$ i.e. $f(x) = 0$ d'où $x \in \ker f$.

Ainsi $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.

Finalement $\ker g = \{0\}$ et donc g est injectif.

3.d Comme g est isomorphisme antisymétrique de $\operatorname{Im} f$, par la question II.3.a on peut affirmer $\mathrm{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$ est pair.

Partie III

1. $a = 0$ et $\mathcal{B}$ base orthonormée quelconque conviennent.

2.a $0 < \mathrm{rg}(f) \leq 3$ et $\mathrm{rg}(f)$ est pair donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

2.b La matrice A de f dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique.

Comme $k \in \ker f$, la dernière colonne de A est nulle.

Par antisymétrie, la dernière ligne de A est aussi nulle et, toujours par antisymétrie, A s'avère être de la forme voulue.

3. Existence :

Si $f = 0$ alors $u = 0$ convient.

Si $f \neq 0$ alors, en reprenant la construction de la question 2, $u = -a.k$ convient.

Unicité :

Soit u, v deux vecteurs solutions du problème posé.

$\forall x \in E, f(x) = u \wedge x = v \wedge x$ donc $(u - v) \wedge x = 0$.

Le vecteur $u - v$ est colinéaire à tout vecteur de E, c'est donc le vecteur nul.