Endomorphismes cycliques

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note Id l'application identique de E.

Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \text{Id}$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément $\vec{a}$ de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(\vec{a}) = \vec{a}$
- la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ est génératrice de E
- la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ est alors appelée cycle de E.

Partie I – Exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$.
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

1.a Montrer que f est en endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1.b En considérant $\vec{a} = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p, l'entier p étant à préciser.

2. Dans cette question $E = \text{Vect}(\sin, \cos)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$.

2.a Déterminer la dimension de E.

2.b Soit $p \in \mathrm{N} - \{0,1,2\}$. Pour $f \in E$, on note $\tau_p(f)$ l'application définie par $\tau_p(f) : x \mapsto f(x + \dfrac{2\pi}{p})$.
Montrer que $\tau_p(f) \in E$.

2.c Montrer que $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$ est un endomorphisme de E.

2.d On pose $f = \sin$. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\tau_p^k(f)$.
Observer que, pour $k, \ell \in \mathrm{N}$ on a $\tau_p^k(f) = \tau_p^\ell(f) \Rightarrow k = \ell \ [p]$.

2.e Montrer que τ_p est cyclique d'ordre p.

Partie II – Etude générale

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p.
Soit $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ un cycle de f.

1. Montrer $p \geq n$.

2.a Observer que, pour tout $k \in \mathrm{N}$, $f^p(f^k(\vec{a})) = f^k(\vec{a})$.

2.b En déduire que $f^p = \text{Id}$.
L'endomorphisme f est-il bijectif ?

2.c Par quel argument rapide pourrait-on justifier que $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(\text{Id} + f + ... + f^{p-1})$ sont des sous-espaces vectoriels de E ? Etablir qu'ils sont supplémentaires.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{k-1}(\vec{a}))$ soit libre.

3.a Montrer que $f^m(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{m-1}(\vec{a})$.

3.b Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{m-1}(\vec{a})$.

3.c En déduire que $m = n$ et que la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{n-1}(\vec{a}))$ est une base de E.

4. Soit g un endomorphisme commutant avec f i.e. tel que $g \circ f = f \circ g$.
On note $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ les n nombres réels tels que : $g(\vec{a}) = \alpha_0.\vec{a} + \alpha_1.f(\vec{a}) + ... + \alpha_{n-1}f^{n-1}(\vec{a})$.
On considère h l'endomorphisme de E défini par $h = \alpha_0.\mathrm{Id} + \alpha_1.f + ... + \alpha_{n-1}.f^{n-1}$.

4.a Montrer que f et h commutent.

4.b Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(\vec{a})) = h(f^k(\vec{a}))$.

4.c En déduire que $g = h$.

4.d Quels sont les endomorphismes de E commutant avec f ?