Correction

d'après Mines sup 2000 (spécialité)

Partie I

1. La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue et par développement :
$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x \cos y$.
La fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est continue et :
$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $2\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\dfrac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^{y-x}+\mathrm{e}^{-x-y}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-(x+y)}}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^{y-x}}{2}$
ce qui donne : $2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)$.
Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

2. f_α est continue par opérations sur les fonctions continues.
$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x+y)+f_\alpha(x-y) = f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y)$.
La fonction f_α appartient à $\mathcal{E}$.

3.a Pour $x=y=0$, on obtient $2f(0)=2f(0)^2$ donc $f(0)(1-f(0))=0$ puis $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

3.b Supposons $f(0)=0$.
Pour $x\in\mathbb{R}$ et $y=0$, on obtient $2f(x)=2f(x)f(0)=0$ donc $f=0$.

3.c Supposons $f(0)=1$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Pour $x=0$ et $y\in\mathbb{R}$, $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$ donc $f(-y)=f(y)$ et f est paire.

Partie II

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. On a $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.
En dérivant la relation par rapport à y, on obtient $f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)f'(y)$.
En dérivant à nouveau par rapport à y, on obtient : $f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$.

2. Posons $\lambda = f''(0)$.
Pour $x\in\mathbb{R}$ et $y=0$, la relation ci-dessus donne $2f''(x)=2f''(0)f(x)$ i.e. $f''(x)=\lambda f(x)$.

3. $y''+\mu y=0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2+\mu=0$.
Si $\mu>0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes : $i\sqrt{\mu}$ et $-i\sqrt{\mu}$.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x)=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\mu}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}x}$.
Si $\mu<0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles : $\sqrt{-\mu}$ et $-\sqrt{-\mu}$.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x)=C_1\cos(\sqrt{-\mu}x)+C_2\sin(\sqrt{-\mu}x)$.
Si $\mu=0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double : 0.
La solution générale de l'équation différentielle est $y(x)=C_1x+C_2$.

4. Soit f un élément de $\mathcal{E}$ deux fois dérivable.
f peut être la fonction nulle.
Si f n'est pas la fonction nulle alors f est une fonction paire, vérifiant l'équation $f(0)=1$ et solution d'une équation différentielle du type $y''+\mu y=0$ avec $\mu\in\mathbb{R}$.
Dans le cas $\mu>0$, on obtient $f(x)=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\mu}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}x}$ avec $C_1=C_2$ (par parité) et $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$ (par la relation $f(0)=1$). Par suite $f(x)=\operatorname{ch}(\sqrt{\mu}x)$.
Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha=\sqrt{\mu}$) assure qu'une telle fonction est solution.
Dans le cas $\mu<0$, on obtient $f(x)=C_1\cos(\sqrt{-\mu}x)+C_2\sin(\sqrt{-\mu}x)$ avec $C_2=0$ (par parité) et $C_1=1$

(par la relation $f(0)=1$). Par suite $f(x)=\cos(\sqrt{-\mu}x)$.
Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha=\sqrt{-\mu}$) assure qu'une telle fonction est solution.
Dans le cas $\mu=0$, on obtient $f(x)=C_1x+C_2$ avec $C_1=0$ (par parité) et $C_2=1$ (par $f(0)=1$). Par suite $f(x)=1$. Inversement cette fonction est solution.
Résumons, les fonctions deux fois dérivables solutions sont :
$f:x\mapsto 0$, $f:x\mapsto 1$, $f:x\mapsto\cos(\alpha x)$ (avec $\alpha>0$) et $f:x\mapsto \text{ch}(\alpha x)$ (avec $\alpha>0$).

Partie III

1. I.3.b implique par contraposition $f(0)\neq 0$, I.3.a donne alors $f(0)=1$ et I.3.c donne f paire.
Puisque f s'annule au moins une fois, que ce n'est pas en 0 et qu'elle est paire, on peut assurer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+*$.

2.a E est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (via III.1) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure a .

2.b (1) Par l'absurde, supposons $f(a)\neq 0$.
Par continuité en a , il existe un voisinage de a , de la forme $[a-\alpha,a+\alpha]$ (avec $\alpha>0$) sur lequel f ne s'annule pas. Par suite E étant minorée par a , l'est aussi par $a+\alpha$. Or a est le plus grand des minorants de E . Absurde.
(2) En exploitant la réalisation séquentielle d'une borne inférieure.
Il existe $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n\to a$. Puisque f est continue $f(x_n)\to f(a)$.
Or $x_n\in E$ donc $f(x_n)=0$ puis par unicité de la limite $f(a)=0$.
$a=\inf E$, $E\subset\mathbb{R}^+*$ donc $a\in\mathbb{R}^+$ or $f(a)=0$ et $f(0)=1$ donc $a>0$.

2.c De part la définition de a , on a $\forall x\in]0,a[$, $f(x)\neq 0$. De plus, on sait $f(0)=1$.
Si par l'absurde, $\exists y\in[0,a[$ tel que $f(y)\leq 0$ alors en appliquant le TVI entre 0 et y , on peut affirmer que f s'annule entre 0 et y . Cela contredit la propriété : $\forall x\in]0,a[$, $f(x)\neq 0$. Absurde.

3.a Exploitons la relation $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ avec $x=y=\dfrac{a}{2^{q+1}}$.
On obtient $f\left(2\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)+1=2f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)$ puis la relation voulue.

3.b Par récurrence que $q\in\mathbb{N}$.
Pour $q=0$: $f\left(\dfrac{a}{2^0}\right)=f(a)=0=g(a)$.
Supposons la propriété établie au rang $q\in\mathbb{N}$.
On a $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)+1=2\left(f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$ et $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)\underset{HR}{=}g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{q+1}}\right)$ donc

$$\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2^{q+1}}+1\right)=\cos^2\frac{\pi}{2^{q+2}}$$ en vertu de $1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$.

Sachant $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)>0$ et $\cos\dfrac{\pi}{2^{q+2}}>0$ on a $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2^{q+2}}=g\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)$.
Récurrence établie.

3.c Par récurrence double sur $p\in\mathbb{N}$, montrons que $\forall q\in\mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$
Pour $p=0$, $f(0)=1=g(0)$.
Pour $p=1$, $\forall q\in\mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$ en vertu de III.3b
Supposons la propriété vraie aux rangs p et $p-1$ avec $p\geq 1$.
En exploitant la relation $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

avec $x=\dfrac{pa}{2^q}$ et $y=\dfrac{a}{2^q}$ on obtient : $f\left(\dfrac{(p+1)a}{2^q}\right)+f\left(\dfrac{(p-1)a}{2^q}\right)=2f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$.

Par HR : $f\left(\dfrac{(p+1)a}{2^q}\right)=2f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)-f\left(\dfrac{(p-1)a}{2^q}\right)=2g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)-g\left(\dfrac{(p-1)a}{2^q}\right)$.

Or $2g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)-g\left(\dfrac{(p-1)a}{2^q}\right)=2\cos\dfrac{p\pi}{2^{q+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{q+1}}-\cos\dfrac{(p-1)\pi}{2^{q+1}}=\cos\dfrac{(p+1)\pi}{2^{q+1}}=g\left(\dfrac{(p+1)a}{2^{q+1}}\right)$

via la formule $2\cos x\cos y-\cos(x-y)=\cos(x+y)$.

Ainsi $f\left(\dfrac{(p+1)a}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{(p+1)a}{2^q}\right)$.

Récurrence (double) établie.

3.d Par parité de f et g, on peut étendre la propriété à $p\in\mathbb{Z}$.

4.a Soit $x\in\mathbb{R}$ .Posons $u_n=\dfrac{E\left(2^n x/a\right)a}{2^n}$. On a $u_n\in D_a$ et puisque $\dfrac{2^n x}{a}-1\le E\left(\dfrac{2^n x}{a}\right)\le\dfrac{2^n x}{a}$ on a aussi

$x-\dfrac{a}{2^n}\le u_n\le x$. Par le théorème des gendarmes : $u_n\to x$.

4.b Soit $x\in\mathbb{R}$ et (u_n) une suite d'éléments de D_a telle que $u_n\to x$.

Puisque f et g sont continues et que $u_n\to x$ on a $f(u_n)\to f(x)$ et $g(u_n)\to g(x)$.

Or, par III.3d, on a $f(u_n)=g(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc à la limite $f(x)=g(x)$.

Finalement $f=g$.