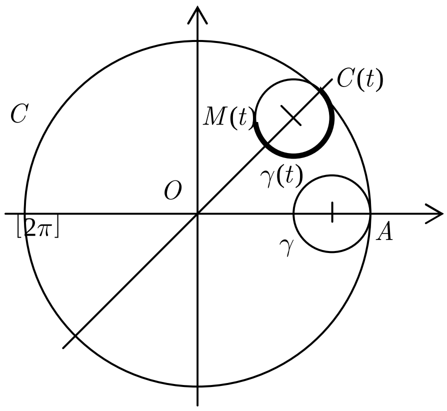
Correction

d'après Ecole de L'Air 2004

Partie I



1.a L'arc $AC(t)$ a pour longueur (algébrique) $L = Rt$.

1.b L'arc précédent a aussi pour longueur
$L = r(\overrightarrow{\omega(t)M(t)}, \overrightarrow{\omega(t)C(t)})$ donc
$(\overrightarrow{\omega(t)M(t)}, \overrightarrow{\omega(t)C(t)}) = \dfrac{R}{r}t \quad [2\pi]$ puis
$(\vec{i}, \overrightarrow{\omega(t)M(t)}) = (\vec{i}, \overrightarrow{\omega(t)C(t)}) + (\overrightarrow{\omega(t)C(t)}, \overrightarrow{\omega(t)M(t)}) = t - \dfrac{R}{r}t \quad [2\pi]$

2. $C(t)$ a pour affixe Re^{it} et $\omega(t)$ a pour affixe $(R-r)e^{it}$.

3. $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{O\omega(t)} + \overrightarrow{\omega(t)M(t)}$ donne en termes d'affixe :
$z(t) = (R-r)e^{it} + re^{i(t-Rt/r)}$ car le vecteur $\overrightarrow{\omega(t)M(t)}$ a pour affixe $re^{i(t-Rt/r)}$ compte tenu des considérations angulaires qui ont précédées.

Partie II

1. $z(t+2\pi/3) = z(t)e^{2i\pi/3}$ et $z(-t) = \overline{z(t)}$. Le point $M(t+2\pi/3)$ est l'image du point $M(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$. Le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par la symétrie d'axe (Ox) . On peut limiter l'étude à $I = [0, \pi/3]$ et on complétera la courbe par la symétrie présenté et en appliquant les rotations de centre O et d'angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

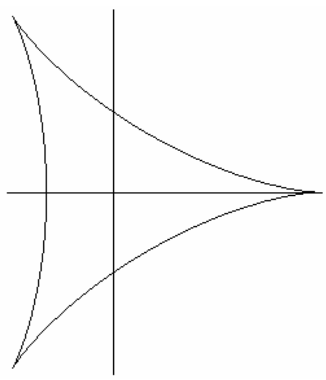
2. $z'(t) = \dfrac{2iR}{3}(e^{it} - e^{-2it}) = \dfrac{2iR}{3}e^{-it/2}(e^{3it/2} - e^{-3it/2}) = -\dfrac{4R}{3}e^{-it/2}\sin\dfrac{3t}{2}$.
Sur I , $\sin 3t/2 \geq 0$ donc $|z'(t)| = \dfrac{4R}{3}\sin\dfrac{3t}{2}$ et $\arg(z'(t)) = \pi - \dfrac{t}{2} \quad [2\pi]$ (pour $t \neq 0$).
Pour tout $t \in]0, \pi/3]$, $M(t)$ est régulier. En revanche, $M(0)$ est singulier.

3. $x'(t) = -\dfrac{4R}{3}\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \leq 0$ et $y'(t) = \dfrac{4R}{3}\sin\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \geq 0$.

t	0		$\pi/3$
$x(t)$	R	$\searrow$	$R/3$

et

t	0		$\pi/3$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$R/\sqrt{3}$



4. En $t = 0$, le point est singulier, $z''(0) = -2R$ donc $x''(0) = -2R$ et $y''(0) = 0$.
Il y a une tangente horizontale en ce point.
En $t = \pi/3$, $x'(\pi/3) = -2R/\sqrt{3}$ et $y'(\pi/3) = 2R/3$
donc la tangente a pour pente $m(\pi/3) = -1/\sqrt{3}$.
La pente de la droite $(OM(\pi/3))$ étant $p = \sqrt{3}$, on a $pm(\pi/3) = -1$ d'où l'orthogonalité annoncée.

5. Ci-contre

Partie III

1. Rappelons $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ et $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$. On a donc
$z(t) = \dfrac{R}{4}(3e^{it} + e^{-3it}) = \dfrac{R}{4}(3\cos t + 3i\sin t + \cos 3t - i\sin 3t) = R(\cos^3 t + i\sin^3 t)$.

2. $z(t+\pi)=-z(t)$ donc $M(t+\pi)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O.

$z(-t)=\overline{z(t)}$ donc $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (Ox).

Il suffit alors d'étudier l'arc sur $J=[0,\pi/2]$ puis de compléter la courbe par les symétries préciser ci-dessus.

3. $z'(t)=\dfrac{3iR}{4}(\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-3it})=-\dfrac{3R}{2}\mathrm{e}^{-it}\sin 2t$, $x'(t)=-\dfrac{3R}{2}\sin(2t)\cos(t)$ et $y'(t)=\dfrac{3R}{2}\sin(2t)\sin(t)$.

t	0		$\pi/2$
$x(t)$	1	$\searrow$	0

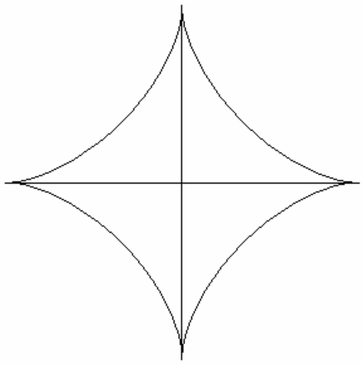
et

t	0		$\pi/2$
$y(t)$	0	$\nearrow$	1

.

4. Les points singuliers sont obtenus pour $t=0$ et $t=\pi/2$.

$z''(0)=-3R$ et $z''(\pi/2)=-3Ri$. Les tangentes en ces points sont respectivement horizontales et verticales.



5. Ci-contre

6. La tangente en un point régulier est dirigée par $\vec{u}\begin{vmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{vmatrix}$, elle a donc pour équation

$\sin(t)x+\cos(t)y=R\sin t\cos^3 t+R\cos t\sin^3 t$ i.e.

$\sin(t)x+\cos(t)y=R\sin t\cos t$.

Par suite $A(t)\begin{vmatrix}R\cos t\\ 0\end{vmatrix}$ et $B(t)\begin{vmatrix}0\\ R\sin t\end{vmatrix}$ puis $A(t)B(t)=R$.