Correction

1.a Soit M un point du plan et $M' = s_{(Ox)}(M)$. On a $MF = M'F$ et $MF' = M'F'$ donc $M \in \Gamma \Leftrightarrow M' \in \Gamma$.
Soit M un point du plan et $M' = s_{(Oy)}(M)$. On a $MF = M'F'$ et $MF' = M'F$ donc $M \in \Gamma \Leftrightarrow M' \in \Gamma$.
Ainsi Γ est symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy) (et par suite par rapport au point O).

1.b Soit $M\left|\begin{matrix}x\\0\end{matrix}\right.$ un point de l'axe (Ox). $MF = |x-1|$ et $MF' = |x+1|$ donc
$M \in \Gamma \Leftrightarrow |x-1||x+1| = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ ou $x = 0$.
Par suite $\Gamma \cap (Ox) = \{A, O, A'\}$ avec $A\left|\begin{matrix}\sqrt{2}\\0\end{matrix}\right.$ et $A'\left|\begin{matrix}-\sqrt{2}\\0\end{matrix}\right.$.
Soit $M\left|\begin{matrix}0\\y\end{matrix}\right.$ un point de l'axe (Oy). $MF = MF' = \sqrt{1+y^2}$ donc $M \in \Gamma \Leftrightarrow 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0$.
Par suite $\Gamma \cap (Oy) = \{O\}$.

1.c Si $OM > 2$ alors $FM \geq OM - OF > 1$ et $F'M > 1$ donc $MF.MF' > 1$ et $M \notin \Gamma$.
Par contraposée $M \in \Gamma \Leftrightarrow OM \leq 2$ et donc Γ est incluse dans le disque de centre O et de rayon 2.
ou :

$$OM^2 = \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF'}\right\|^2 = \frac{1}{4}\left(MF^2 + MF'^2 + 2\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MF'}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(MO^2 + OF^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OF} + MO^2 + OF'^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OF'} + 2\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MF'}\right) \leq \frac{1}{2}OM^2 + 1$$

donc $OM^2 \leq 2$ puis $OM \leq \sqrt{2}$.

2.a $MF^2 = (\rho\cos\theta - 1)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho\cos\theta$ et
$MF'^2 = (\rho\cos\theta + 1)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = \rho^2 + 1 + 2\rho\cos\theta$.

2.b $M \in \Gamma \Leftrightarrow MF.MF' = 1 \Leftrightarrow MF^2.MF'^2 = 1 \Leftrightarrow (\rho^2 + 1 - 2\rho\cos\theta)(\rho^2 + 1 + 2\rho\cos\theta) = 1$
$\Leftrightarrow \rho^4 + 2\rho^2(1 - 2\cos^2\theta) = 0 \Leftrightarrow \rho^4 = 2\rho^2\cos 2\theta$

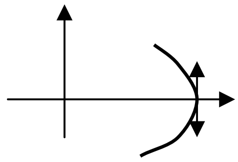
2.c Notons Γ' la courbe d'équation polaire $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$. Par ce qui précède $\Gamma' \subset \Gamma$.
Inversement, soit M un point de Γ.
Si $M = O$ alors $M \in \Gamma'$ car $O \in \Gamma'$ (prendre $\theta = \pi/4$).
Si $M \neq O$ alors on peut choisir un représentant polaire (ρ, θ) du point M avec $\rho > 0$.
La relation $\rho^4 = 2\rho^2\cos 2\theta$ implique alors $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ d'où $\cos 2\theta \geq 0$ et $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$.
Ainsi $M \in \Gamma'$. Finalement $\Gamma = \Gamma'$.

3.a $\theta \mapsto \rho(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}$ est définie sur les intervalles $[-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi]$ donc $\theta \mapsto M(\theta)$ aussi
$\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ donc $M(\theta + \pi) = s_O(M(\theta))$.
On peut limiter l'étude à $[-\pi/4, \pi/4]$, courbe complétée par la symétrie de centre O.
$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$.
On peut limiter l'étude à $[0, \pi/4]$, courbe complétée par la symétrie d'axe (Ox).

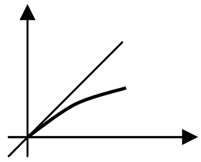
3.b $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est dérivable sur $[0, \pi/4[$ et $\rho'(\theta) = -\dfrac{2\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$. $\rho'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$.

θ	0		$\pi/4$
$\rho'(\theta)$	0	$-$	$\|$
$\rho(\theta)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

.



3.c Etude en $\theta = 0$: $\rho(0) = \sqrt{2}$ et $\rho'(0) = 0$. Tangente orthoradiale.



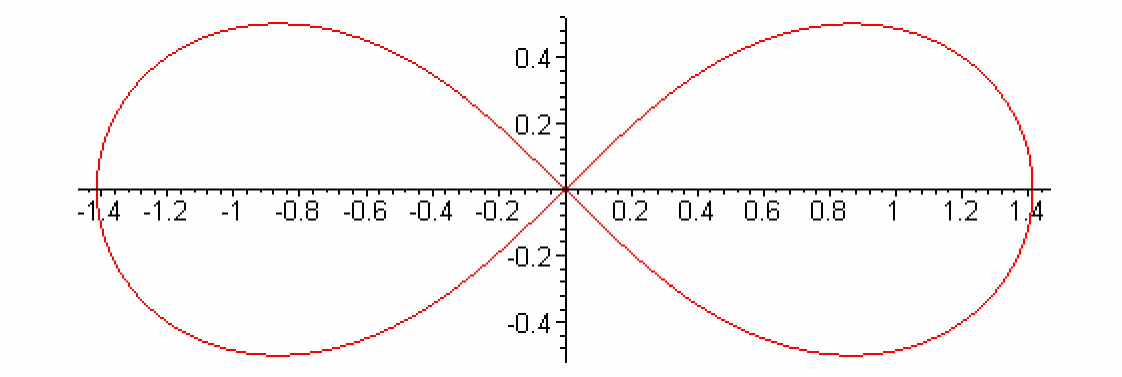
Etude en $\theta = \pi/4$: Passage par l'origine

θ		$\pi/4$	
$\rho(\theta)$	$+$	0	$\|$

.

La droite $\theta = \pi/4$ est tangente à la courbe en ce point.

3.d Pour déterminer les points de tangentes horizontales, introduisons $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$ et déterminons les valeurs d'annulation de $y'(\theta)$. En effet, tout point en dehors de l'origine étant régulier, l'annulation de



$y'(\theta)$ en un tel point équivaut à l'horizontalité de la tangente en ce point car $x'(\theta)$ y sera non nul.
, $y'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/6$ dans $[0,\pi/4]$.

4.a $\overrightarrow{FA(\theta)} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OM(\theta)} + \overrightarrow{M(\theta)A(\theta)}$ donc $\overrightarrow{FA(\theta)}\left|\begin{matrix} -1+\rho\cos\theta+\cos 2\theta \\ \rho\sin\theta+\sin 2\theta \end{matrix}\right.$ avec $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$

$$\begin{aligned} FA(\theta)^2 &= (-1+\rho\cos\theta+\cos 2\theta)^2 + (\rho\sin\theta+\sin 2\theta)^2 \\ &= 2+\rho^2-2\rho\cos\theta+2\rho\cos\cos 2\theta-2\cos 2\theta+2\rho\sin\theta\sin 2\theta \\ &= 2+\rho^2-2\rho\cos\theta+2\rho\cos\theta-2\cos 2\theta = 2 \end{aligned}$$

4.b Posons $A(\theta)\left|\begin{matrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{matrix}\right.$ avec $x(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}\cos\theta+\cos 2\theta$ et $y(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}\sin\theta+\sin 2\theta$.

Sur $[0,\pi/4[$, $x'(\theta) = -\dfrac{\sin 3\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}} - 2\sin 2\theta \le 0$ donc

θ	0		$\pi/4$
$x(\theta)$	$\sqrt{2}+1$	$\searrow$	0

.

De plus sur $[0,\pi/4]$, $y(\theta) > 0$ donc $A(\theta)$ décrit la portion du cercle $\mathcal{C}$ correspondant aux abscisses et ordonnées strictement positives.

4.c A partir d'un point A de la portion précédente du cercle $\mathcal{C}$, on forme l'intersection du cercle de centre A et de rayon 2 avec le cercle $\mathcal{C}'$ et on y considère le point B d'ordonnée différente de celle de A . De part ce qui précède, il existe $\exists\theta \in]0,\pi/4[$ tel que $A = A(\theta)$ et $B = B(\theta)$.
Le point $M(\theta)$ est alors le milieu du segment $[A,B]$.