Lemniscate de Bernoulli

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\vec{u}_\theta=\cos\theta.\vec{i}+\sin\theta.\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta=-\sin\theta.\vec{i}+\cos\theta.\vec{j}$.

On étudie la courbe Γ formé des points M du plan tels que $MF.MF'=1$ avec $F\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ et $F'\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$.

La courbe Γ est appelée lemniscate de Bernoulli de foyers F et F'.

1.a Justifier que Γ est symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy).

1.b Déterminer l'intersection de Γ avec les axes (Ox) et (Oy).

1.c Déterminer un réel R tel que la courbe Γ soit incluse dans le disque de centre O et de rayon R.

2. Afin de représenter Γ, nous allons en déterminer une équation polaire.
Soit M un point du plan dont (ρ,θ) est un système de coordonnées polaires.

2.a Exprimer MF^2 et de même MF'^2 en fonction de ρ et θ.

2.b Justifier que $M\in\Gamma$ ssi $\rho^4=2\rho^2\cos 2\theta$.

2.c En déduire que $\rho=\sqrt{2\cos 2\theta}$ est une équation polaire de Γ.

3. On note $M(\theta)$ le point courant de l'arc Γ d'équation polaire $\rho=\sqrt{2\cos 2\theta}$ i.e. le point déterminé par la relation vectorielle $\overrightarrow{OM(\theta)}=\rho(\theta)\vec{u}_\theta$.

3.a Préciser le domaine de définition de l'application $\theta\mapsto M(\theta)$.
Comparer $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ d'une part, $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ d'autre part.

3.b Dresser le tableau de variation de l'application $\theta\mapsto\rho(\theta)=\sqrt{2\cos 2\theta}$ sur $[0,\pi/4]$.

3.c Préciser l'allure de Γ au voisinage des points de paramètres $\theta=0$ et $\theta=\pi/4$ en y figurant le sens de parcours des θ croissants.

3.d Pour quels $\theta\in[0,\pi/4]$, la courbe Γ admet-elle en $M(\theta)$ une tangente horizontale ?

3.e Représenter Γ en prenant une unité égale à 4cm.

4. On note $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ les cercles de centres F,F' et de rayon $\sqrt{2}$.

4.a Soit $A(\theta)$ et $B(\theta)$ les points déterminés par $\overrightarrow{M(\theta)A(\theta)}=\vec{u}_{2\theta}$ et $\overrightarrow{M(\theta)B(\theta)}=-\vec{u}_{2\theta}$ de sorte qu'on ait, entre autres, $A(\theta)B(\theta)=2$ et $M(\theta)=m[A(\theta),B(\theta)]$. Montrer que $A(\theta)\in\mathcal{C}$.
On justifie, par des calculs semblables mais non demandés, que $B(\theta)\in\mathcal{C}'$.

4.b Préciser la portion de $\mathcal{C}$ décrite par le point $A(\theta)$ pour $\theta\in\,]0,\pi/4[$.

4.c Déduire de ce qui précède comment construire les points de paramètres $M(\theta)$ (avec $\theta\in\,]0,\pi/4[$).