Correction

1.a $x^2-3y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=1$ et $b=1/\sqrt{3}$.

$A(1,0)$ et $A'(-1,0)$.

1.b $c^2=a^2+b^2=4/3$, $c=2/\sqrt{3}$ puis $e=c/a=2/\sqrt{3}$.

2.a Soit $M(x,y)$, $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')$:

$(M\star M')\star M''\left|\begin{matrix}(xx'+3yy')x''+3(xy'+yx')y'' \\ (xx'+3yy')y''+(xy'+yx')x''\end{matrix}\right.$ et $M\star(M'\star M'')\left|\begin{matrix}x(x'x''+3y'y'')+3y(x'y''+y'x'') \\ x(x'y''+y'x'')+y(x'x''+3y'y'')\end{matrix}\right.$

donc $(M\star M')\star M''=M\star(M'\star M'')$ ainsi $\star$ est associative.

Sans difficulté : $M\star M'=M'\star M$ et donc $\star$ est commutative.

Sans difficulté : $A\star M=M\star A=M$ et donc A est élément neutre pour $\star$.

2.b L'ensemble des points M tels que $F(M)=0$ est la réunion de deux asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

L'ensemble des points M tels que $F(M)=1$ est l'hyperbole $\mathcal{H}$.

2.c Soit $M(x,y)$, $M'(x',y')$. $F(M\star M')=(xx'+3yy')^2-3(xy'+yx')^2$ donc en développant puis en factorisant $F(M\star M')=x^2x'^2-3x^2y'^2-3y^2x'^2+9y^2y'^2=(x^2-3y^2)(x'^2-3y'^2)=F(M)F(M')$.

Si $M,M'\in\mathcal{H}$ alors $F(M)=F(M')=1$ donc $F(M\star M')=1$ d'où $M\star M'\in\mathcal{H}$.

3.a $\mathcal{H}$ est stable pour $\star$, $\star$ est associative, $\star$ est commutative et $A\in\mathcal{H}$ donc $(\mathcal{H},\star)$ est un monoïde commutatif.

Soit $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\in\mathcal{H}$ et $M'\left|\begin{matrix}x\\-y\end{matrix}\right.$ son symétrique par rapport à (Ox).

Par calculs $M\star M'=A=M'\star M$ donc M est symétrisable et M' est son symétrique.

Finalement $(\mathcal{H},\star)$ est un groupe abélien.

3.b $\mathcal{H}^+$ est inclus dans $\mathcal{H}$, contient A, et on vérifie aisément que $\mathcal{H}^+$ est stable par passage à l'inverse. Soit $M(x,y)$, $M'(x',y')$ deux points de $\mathcal{H}^+$ et $x''=xx'+3yy'$ l'abscisse de $M\star M'$. Puisque $x^2-3y^2=1$, on a $\sqrt{3}|y|<|x|$ et de même $\sqrt{3}|y'|<|x'|$ donc $3|yy'|<|xx'|$ d'où $x''>0$. Ainsi $\mathcal{H}^+$ est aussi stable par composition. Finalement $\mathcal{H}^+$ est un sous-groupe de $(\mathcal{H},\star)$.

$\mathcal{H}^-$ n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{H}$ car, entre autres, cet ensemble ne contient pas A.

4.a $\overrightarrow{MM'}\left|\begin{matrix}x'-x\\y'-y\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{AN}\left|\begin{matrix}xx'+3yy'-1\\xy'+yx'\end{matrix}\right.$.

$\mathrm{Det}(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{AN})=(x'-x)(xy'+yx')-(y'-y)(xx'+3yy'-1)=-x^2y'+x'^2y-3yy'^2+3y^2y'-y'+y=0$ car $x^2-3y^2=x'^2-3y'^2=1$ donc (MM') et (AN) sont parallèles.

4.b $\overrightarrow{AN}\left|\begin{matrix}x^2+3y^2-1\\2xy\end{matrix}\right.$ et la tangente en M est dirigée par $\vec{u}\left|\begin{matrix}3y\\x\end{matrix}\right.$ (car la tangente en $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation $xx_0-3yy_0=1$).

$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AN},\vec{u})=x^3+3xy^2-x-6xy^2=0$ donc (AN) et la tangente en M à $\mathcal{H}$ sont parallèles.

4.c Soit $M,M'\in\mathcal{H}$ et $N=M\star M'$.

Si $M=M'$ on obtient N en considérant l'intersection autre que A de $\mathcal{H}$ avec la parallèle à la tangente à M en $\mathcal{H}$ passant par A.

Si M et M' sont symétriques par rapport à (Ox) alors $N=A$.

Dans les autres cas, on obtient N en considérant l'intersection autre que A de $\mathcal{H}$ avec la parallèle à (MM') passant par A.