Loi de groupe sur une hyperbole

Le plan usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.

On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 = 1$.

1. *(Etude de $\mathcal{H}$)*

1.a Préciser les coordonnées des sommets A et A' de l'hyperbole $\mathcal{H}$
(A désignant le sommet d'abscisse positive et A' l'autre).

1.b Déterminer l'excentricité e de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

2. *(Une loi de composition interne sur le plan)*

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'une loi de composition interne notée $\star$ qui aux points M et M' de coordonnées (x,y) et (x',y') associe le point $N = M \star M'$ de coordonnées (α,β) définies par : $\begin{cases}\alpha = xx' + 3yy' \\ \beta = xy' + yx'\end{cases}$.

2.a Montrer que la loi $\star$ est associative, commutative et qu'elle possède un élément neutre qu'on précisera.

2.b On considère l'application F de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}$ qui au point M de coordonnées (x,y) associe
$F(M) = x^2 - 3y^2$. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $F(M) = 0$? $F(M) = 1$?.

2.c Soit M et M' deux points du plan. Etablir que $F(M \star M') = F(M)F(M')$.
En déduire que si M et M' appartiennent à $\mathcal{H}$, il en est de même de $M \star M'$.

3. *(Structure de groupe sur $\mathcal{H}$)*

3.a Montrer que la loi $\star$ munit l'ensemble $\mathcal{H}$ d'une structure de groupe commutatif et que le symétrique d'un point M de $\mathcal{H}$ pour la loi $\star$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).

3.b On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble formé des points de $\mathcal{H}$ d'abscisse strictement positive et $\mathcal{H}^- = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}^+$.
$\mathcal{H}^+$ est-il un sous groupe de $\mathcal{H}$? Même question pour $\mathcal{H}^-$.

4. *(Construction du composé de deux points de $\mathcal{H}$)*

4.a Soit M et M' deux points distincts de $\mathcal{H}$, non symétriques par rapport à (Ox) et $N = M \star M'$.
Montrer que la droite (MM') est parallèle à la droite (AN).

4.b Soit M un point de $\mathcal{H}$ et $N = M \star M$.
Montrer que la droite (AN) est parallèle à la tangente en M à $\mathcal{H}$.

4.c En déduire un procédé géométrique de construction du composé par $\star$ de deux points de $\mathcal{H}$.