Correction

d'après Mines de sup 2002

Partie I

1. Si A est semblable à B alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
   Pour $Q = P^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$, on a $B = Q^{-1}AQ$ donc B est semblable à A.
2. Si A est semblable à B et B semblable à C alors il existe $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que :
   $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$ et donc $A = (PQ)^{-1}C(PQ)$ avec $PQ \in GL_3(\mathbb{R})$. Ainsi A et C sont semblables.
3. Si A est semblable à B alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
   Or P et P^{-1} sont inversibles et on sait que le rang reste inchangé lors d'un produit par une matrice inversible donc $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} P^{-1}BP = \operatorname{rg} A$.
   De plus $\det B = \det P^{-1}AP = \det P^{-1} \times \det A \times \det P$ avec $\det P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}$ et donc $\det B = \det A$.

Partie II

1.a $\forall y \in \operatorname{Im} w, \exists x \in \ker u^{p+q}$ tel que $y = w(x) = u^q(x)$.
On a alors $u^p(y) = u^{p+q}(x) = 0$ car $x \in \ker u^{p+q}$. Ainsi $y \in \ker u^q$ et donc $\operatorname{Im} w \subset \ker u^p$.

1.b Par le théorème du rang : $\dim \ker u^{p+q} = \operatorname{rg} w + \dim \ker w$.
Or $\operatorname{rg} w = \dim \operatorname{Im} w \le \dim \ker u^p$ et $\ker w = \ker u^q \cap \ker u^{p+q} = \ker u^q$ car $\ker u^q \subset \ker u^{p+q}$
donc $\dim \ker u^{p+q} \le \dim \ker u^p + \dim \ker u^q$.

2.a Par le théorème du rang, $\dim \ker u = 1$ et donc $\dim \ker u^2 \le \dim \ker u + \dim \ker u = 2$.
De plus $3 = \dim \ker u^3 \le \dim \ker u^2 + \dim \ker u = \dim \ker u^2 + 1$.
Par double inégalité : $\dim \ker u^2 = 2$.

2.b Puisque $u^2 \ne 0$, il existe $a \in E$ tel que $u^2(a) \ne 0$.
Supposons $\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a = 0$.
En composant cette relation avec u, on obtient : $\beta u^2(a) + \gamma u(a) = 0$ car $u^3 = 0$.
En composant à nouveau avec u, on obtient : $\gamma u^2(a) = 0$.
Sachant $u^2(a) \ne 0$, on conclut $\gamma = 0$ puis en remontant $\beta = \alpha = 0$.
La famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre et formée de $3 = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

2.c $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.a $\operatorname{rg} u \ne 0$ donc $\operatorname{Im} u$ n'est par réduit à $\{0\}$.
Un antécédent b d'un élément non nul de $\operatorname{Im} u$ résout notre problème.

3.b Par le théorème du rang $\dim \ker u = 2$.
$u(b) \in \ker u$ car $u^2 = 0$ et $u(b) \ne 0$ donc, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(u(b))$ en une base de $\ker u$ de la forme $(u(b), c)$.
Supposons $\alpha u(b) + \beta c + \gamma b = 0$.
En appliquant u à cette relation on obtient $\gamma u(b) = 0$ donc $\gamma = 0$ car $u(b) \ne 0$.
La relation initiale devient $\alpha u(b) + \beta c = 0$ qui implique $\alpha = \beta = 0$ car la famille $(u(b), c)$ est libre.
La famille $(u(b), c, b)$ est libre et formée de $3 = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

3.c $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

1.a $N^3 = 0$. N n'est pas inversible donc $\operatorname{rg} N < 3$ d'où $\operatorname{rg} N \leq 2$.

1.b $A(I_3 + M) = (I + N)(I + N^2 - N) = I + N + N^2 + N^3 - N - N^2 = I$

Par le théorème d'inversibilité, A est inversible et B est son inverse.

2.a On a $N^3 = 0$ et $\operatorname{rg} N = 2$ donc N est, moyennant l'introduction d'une base de E, la matrice d'un endomorphisme u de E tel que $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.

Par II.2.c, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit U.

Par suite N et U sont semblables.

2.b Soit $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N = P^{-1}UP$.

On a $M = N^2 - N = P^{-1}UPP^{-1}UP - P^{-1}UP = P^{-1}(U^2 - U)P = P^{-1}VP$.

Ainsi M est semblable à V.

On a alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} V = 2$ et $M^3 = P^{-1}VPP^{-1}VPP^{-1}VP = P^{-1}V^3P = P^{-1} \times 0 \times P = 0$.

2.c On a $M^3 = 0$ et $\operatorname{rg} M = 2$ donc, comme ci-dessus, M est semblable à U et donc à N.

Soit $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$.

On peut écrire $A^{-1} = I_3 + M = I_3 + Q^{-1}NQ = Q^{-1}(I_3 + N)Q = Q^{-1}AQ$ donc A^{-1} et A sont semblables.

3. Si $\operatorname{rg} N = 0$ alors $N = 0$, $A = I_3 = A^{-1}$ et donc A et A^{-1} sont semblables via $P = I_3 \in GL_3(\mathbb{R})$.

Si $\operatorname{rg} N = 1$ alors $\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$ mais dans les deux cas $N^2 = 0$.

Comme en III.2.a et en exploitant II.3.c, on peut alors affirmer que N est semblable à U'.

Par suite M est semblable à V' et donc $M^2 = 0$ et $\operatorname{rg} M = 1$.

Ainsi M est aussi semblable à U' et donc à N.

On peut alors conclure que A et A^{-1} sont semblables.