Propagation d'une information

Préliminaire

Etablir que pour tout x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on a $\ln(1+x)\leq x$.

Objectifs et notations

Ce problème étudie différents modèles de propagation, au cours du temps, d'une information au sein d'une population contenant N individus où N est une entier naturel strictement supérieur à 3. On désignera par le réel t positif la variable représentant le temps.
On suppose qu'à l'instant initial ($t=0$) une seule personne parmi cette population est informée. L'information circule au sein de cette population et lorsqu'une personne est informée à l'instant t elle le reste indéfiniment.
Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif k tel que $k\leq x<k+1$, et la fonction $\ln$ représentera la fonction logarithme népérien.

Partie I : Premier modèle de propagation

Soit C un réel strictement positif. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta<\dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.
On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}(\Delta)-u_n(\Delta)=C\Delta(1-u_n(\Delta))$$

On pose $u_0(\Delta)=\dfrac{1}{N}$.

1.a Exprimer $1-u_{n+1}(\Delta)$ en fonction de $1-u_n(\Delta)$.

1.b Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(\Delta)$.

2. Soit t un réel fixé strictement positif. Le rapport $\dfrac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ.

2.a Comparer $\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\Delta$, t et $\left(\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]+1\right)\Delta$. Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to0}\Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]$.

2.b Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to0}u_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

3. On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t, où t est un réel positif, par $f(t)$, f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantanée de la proportion de personnes informées est déterminé par l'équation différentielle :

$$\forall t\in\mathbb{R}^+, f'(t)=C(1-f(t)).$$

Déterminer la fonction f sachant que $f(0)=\dfrac{1}{N}$.

Partie II : Second modèle de propagation

On désigne toujours par C une constante réelles strictement positive. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta<\dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $v_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.

On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}(\Delta) - v_n(\Delta) = C\Delta v_n(\Delta).(1 - v_n(\Delta)) .$$

On pose $v_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}$.

1.a Pour tout entier naturel n , exprimer $1 - v_{n+1}(\Delta)$ en fonction de $1 - v_n(\Delta)$ et de $1 - C\Delta v_n(\Delta)$.

1.b Montrer que la suite $(v_n(\Delta))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{N}, 1\right[$.

1.c Etudier la convergence de $(v_n(\Delta))$ et déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(\Delta)$.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la rapidité de diffusion de l'information.

2.a Montrer que pour tout entier naturel n : $1 - v_{n+1}(\Delta) \leq q\big(1 - v_n(\Delta)\big)$ avec $q = 1 - \dfrac{C\Delta}{N}$.

2.b En déduire que $1 - v_n(\Delta) \leq \dfrac{N-1}{N} q^n$.

2.c On pose pour tout entier naturel n , $x_n = \dfrac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}$.

Etablir que pour tout entier naturel k : $\ln x_{k+1} - \ln x_k = \ln \dfrac{1 - C\Delta v_k(\Delta)}{1 - C\Delta}$

En déduire que $0 \leq \ln x_{k+1} - \ln x_k \leq \dfrac{C\Delta}{1 - C\Delta} \dfrac{N-1}{N} q^k$.
On pourra exploiter le résultat du préliminaire.

2.d On pose pour tout entier naturel n , $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(\ln x_{k+1} - \ln x_k\big)$.

Montrer que la suite (S_n) converge. On pose $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

2.e Déduire des questions précédentes l'existence d'un réel μ strictement positif tel que :
$1 - v_n(\Delta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu(1 - C\Delta)^n$.

On explicitera la valeur de μ en fonction de S et de $\dfrac{1 - C\Delta v_n(\Delta)}{1 - C\Delta} \geq 1$.

3. On pose pour tout entier naturel n , $y_n = \dfrac{v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}$.

3.a Montrer que pour tout entier naturel k : $\dfrac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + \dfrac{C^2\Delta^2 v_k(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_k(\Delta))}$.

3.b En considérant $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln y_{k+1} - \ln y_k$, établir que : $0 \leq \ln\left(\dfrac{(N-1)v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}\right) \leq n \dfrac{C^2\Delta^2}{1 - C\Delta}$.

3.c Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} v_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

4. On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t , où t est un réel positif, par $g(t)$, g étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantanée de la proportion de personnes informées est déterminé par l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = Cg(t)(1 - g(t)) .$$

En considérant la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{1}{g(t)}$, déterminer l'expression de $g(t)$ pour tout réel t positif sachant que $g(0) = \dfrac{1}{N}$.

Correction

d'après HEC 1999

Partie I

1.a $1-u_{n+1}(\Delta)=(1-C\Delta)(1-u_n(\Delta))$.

1.b $(1-u_n(\Delta))$ est géométrique de raison $1-C\Delta$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, 1-u_n(\Delta)=(1-C\Delta)^n(1-u_0(\Delta))$.

Par suite $u_n(\Delta)=1-\dfrac{N-1}{N}(1-C\Delta)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(\Delta)=1$ car $0\leq 1-C\Delta<1$.

2.a $\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\leq\dfrac{t}{\Delta}<\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]+1$ donc $\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\Delta\leq t<\left(\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]+1\right)\Delta$ car $\Delta>0$.

On a donc $t-\Delta\leq\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\Delta\leq t$ et par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]=t$.

2.b Quand $\Delta\to 0$: $u_{[t/\Delta]}(\Delta)=1-\dfrac{N-1}{N}(1-C\Delta)^{[t/\Delta]}$.

$$(1-C\Delta)^{[t/\Delta]}=\exp\left([t/\Delta]\ln(1-C\Delta)\right)=\exp\left(\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{\ln(1-C\Delta)}{\Delta}\right)$$

or $\Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\to t$ et $\dfrac{\ln(1-C\Delta)}{\Delta}\sim\dfrac{-C\Delta}{\Delta}=-C$ donc $(1-C\Delta)^{[t/\Delta]}\to \mathrm{e}^{-Ct}$ et $u_{[t/\Delta]}(\Delta)\to 1-\dfrac{N-1}{N}\mathrm{e}^{-Ct}$.

3. $y'=C(1-y)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
Solution homogène : $y_0(x)=\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Solution particulière : $y_1(x)=1$.
Solution générale : $y(x)=1+\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$.
La fonction f est solution de l'équation différentielle ci-dessus résolue, il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=1+\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$. Comme de plus $f(0)=1/N$, on a $\lambda=\dfrac{1-N}{N}$ puis $f(x)=1+\dfrac{1-N}{N}\mathrm{e}^{-Ct}$.

Partie II

1.a $1-v_{n+1}(\Delta)=1-v_n(\Delta)-C\Delta v_n(\Delta)(1-v_n(\Delta))=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$.

1.b Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrons $v_n(\Delta)\in\left[\dfrac{1}{N},1\right[$

Pour $n=0$, $v_0(\Delta)=\dfrac{1}{N}\in\left[\dfrac{1}{N},1\right[$.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.
$1-v_{n+1}(\Delta)=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$.
$1-C\Delta v_n(\Delta)\geq 1-v_n(\Delta)\geq 0$ donc $v_{n+1}(\Delta)\leq 1$.
$1-C\Delta v_n(\Delta)\leq 1$ donc $1-v_{n+1}(\Delta)\leq 1-v_n(\Delta)$ puis $v_{n+1}(\Delta)\geq v_n(\Delta)\geq\dfrac{1}{N}$.
Récurrence établie.

1.c On a vu ci-dessus que la suite $(v_n(\Delta))$ est croissante, elle est de surcroît majorée par 1 donc elle converge vers une limite ℓ. Puisque $1/N\leq v_n(\Delta)\leq 1$, on a la limite $1/N\leq\ell\leq 1$.
En passant la relation $1-v_{n+1}(\Delta)=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$ a la limite, on obtient :
$1-\ell=(1-\ell)(1-C\Delta\ell)$ donc $(1-\ell)C\Delta\ell=0$ d'où $\ell=1$.

2.a $1-v_{n+1}(\Delta)=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$

$v_n(\Delta)\geq\dfrac{1}{N}$ donc $1-C\Delta v_n(\Delta)\leq q$ puis, sachant $1-v_n(\Delta)\geq 0$, $1-v_{n+1}(\Delta)\leq q(1-v_n(\Delta))$.

2.b Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$:

Pour $n=0$, $1-v_0(\Delta)=\dfrac{N-1}{N}=\dfrac{N-1}{N}q^0\leq\dfrac{N-1}{N}q^0$.

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.

$1-v_{n+1}(\Delta)\leq q(1-v_n(\Delta))\underset{HR}{\leq}\dfrac{N-1}{N}q^{n+1}$.

Récurrence établie.

2.c $\ln x_{k+1}-\ln x_k=\ln\dfrac{x_{k+1}}{x_k}=\ln\dfrac{1-v_{k+1}(\Delta)}{(1-v_k(\Delta))(1-C\Delta)}=\ln\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}$.

$v_k(\Delta)\leq 1$ donc $\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}\geq 1$ puis $\ln x_{k+1}-\ln x_k\geq 0$.

$\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}=1+\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}(1-v_k(\Delta))$ donc $\ln\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}\leq\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}(1-v_k(\Delta))\leq\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\dfrac{N-1}{N}q^k$.

2.d (S_n) est croissante car $S_{n+1}-S_n=\ln x_{n+1}-\ln x_n\geq 0$.

De plus $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln x_{k+1}-\ln x_k\leq\frac{C\Delta}{1-C\Delta}\frac{N-1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}q^k=\frac{C\Delta}{1-C\Delta}\frac{N-1}{N}\frac{1-q^n}{1-q}\leq\frac{C\Delta}{1-C\Delta}\frac{N-1}{N}\frac{1}{1-q}$.

Ainsi (S_n) est majorée par $M=\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\dfrac{N-1}{N}\dfrac{1}{1-q}$.

Par suite (S_n) converge.

2.e $S_n=\ln x_n-\ln x_0=\ln x_n-\ln\dfrac{N-1}{N}=\ln\dfrac{Nx_n}{N-1}$ donc $\dfrac{Nx_n}{N-1}\to\mathrm{e}^S$ puis $\dfrac{1-v_n(\Delta)}{\frac{(N-1)}{N}\mathrm{e}^S(1-C\Delta)^n}\to 1$.

Ainsi $1-v_n(\Delta)\underset{n\to+\infty}{\sim}\mu(1-C\Delta)^n$ avec $\mu=\dfrac{N-1}{N}\mathrm{e}^S$.

3.a
$$\begin{aligned}\frac{y_{k+1}}{y_k}&=\frac{v_{k+1}(\Delta)(1-v_k(\Delta))}{(1+C\Delta)v_k(\Delta)(1-v_{k+1}(\Delta))}=\frac{v_{k+1}(\Delta)}{(1+C\Delta)v_k(\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\\&=\frac{v_k(\Delta)+C\Delta v_k(\Delta)(1-v_k(\Delta))}{(1+C\Delta)v_k(\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}=\frac{1+C\Delta(1-v_k(\Delta))}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\\&=\frac{(1-C\Delta v_k(\Delta))(1+C\Delta)+C^2\Delta^2v_k(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}=1+\frac{C^2\Delta^2v_k(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\end{aligned}$$

3.b $T_n=\ln y_n-\ln y_0=\ln y_n-\ln\dfrac{1}{N-1}=\ln((N-1)y_n)$

De plus $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{y_{k+1}}{y_k}\geq 0$ car $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}\geq 1$ et

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{y_{k+1}}{y_k}\underset{\ln(1+x)\leq x}{\leq}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^2\Delta^2v_k(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\underset{0\leq v_k(\Delta)\leq 1}{\leq}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^2\Delta^2}{(1+C\Delta)(1-C\Delta)}=n\frac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}$$

donc $0\leq\ln((N-1)y_n)\leq n\dfrac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}$ ce qui correspond à l'encadrement voulu.

3.c Quand $\Delta\to 0$.

$$0\leq\ln\left(\frac{(N-1)v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\right)\leq\left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}\ \text{ or }\ \left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}=\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{C^2\Delta}{1-C^2\Delta^2}\to t\times\frac{0}{1+0}=0$$

Par le théorème des gendarmes : $\ln\left(\dfrac{(N-1)v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\right)\to 0$ puis $\dfrac{(N-1)v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\to 1$.

Or $(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}=\exp\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]\ln(1+C\Delta)\right)=\exp\left(\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{\ln(1+C\Delta)}{\Delta}\right)\to \mathrm{e}^{Ct}$

donc $\dfrac{v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))}\to\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}$ or $\dfrac{v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)}=\dfrac{1}{1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)}-1$ donc $1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)\to\dfrac{1}{1+\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}$ et enfin

$v_{[t/\Delta]}(\Delta)\to 1-\dfrac{1}{1+\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}{1+\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}=\dfrac{1}{1+(N-1)\mathrm{e}^{-Ct}}$ (ouf).

4. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$h'(t)=-\dfrac{g'(t)}{g(t)^2}=C(1-h(t))$. h est solution de l'équation différentielle $y'=C(1-y)$.

Cette équation a déjà été résolue en I.3, donc on peut dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $h(t)=1+\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$.

Puisque $h(0)=N$, on a $\lambda=(N-1)$ puis $h(t)=1+(N-1)\mathrm{e}^{-Ct}$ et enfin $g(t)=\dfrac{1}{1+(N-1)\mathrm{e}^{-Ct}}$.