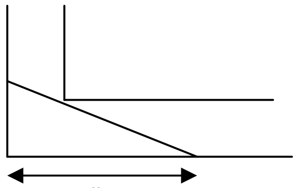
Correction

d'après Banque PT 2003.

Partie I

1.a Posons $y = BC$. Par Thalès : $\dfrac{y}{b} = \dfrac{x}{x-a}$ donc $y = \dfrac{bx}{x-a}$ et donc $AC = \sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1+\dfrac{b^2}{(x-a)^2}}$.

1.b L'intersection des couloirs définies deux angles droits l'un interne, l'autre externe.
En prenant la barre la plus longue possible, on sera amené à visualiser un triangle rectangle dont l'angle droit est l'angle interne, l'hypoténuse est la barre et l'angle externe définissant un point sur cet hypoténuse. La longueur maximale de la barre pour pouvoir passer d'un couloir à l'autre apparaît alors comme étant le minimum de la fonction



$f : x \mapsto x\sqrt{1+\dfrac{1}{(x-1)^2}}$ pour $x > 1$.

$f'(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{(x-1)^2}} - \dfrac{x/(x-1)^3}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(x-1)^2}}}$ qui est du signe de $1+\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{x}{(x-1)^3} = \dfrac{(x-1)^3-1}{(x-1)^3}$.

f admet donc un minimum en 2 et la longueur correspondante de la barre est $2\sqrt{2}$.

2. Notons d le diamètre et h la hauteur.

On cherche à minimiser $S = 2\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \pi dh$ avec $\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 h = V$.

Il s'agit donc de minimiser la fonction $S : d \mapsto \dfrac{\pi d^2}{2} + \dfrac{4V}{d}$. $S'(d) = \pi d - \dfrac{4V}{d^2} = \dfrac{\pi d^3 - 4V}{d^2}$.

Cette fonction admet un minimum en $d = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ et on alors $h = d$.

Partie II

1.a f est lipschitzienne donc continue.

1.b Unicité : Si x, y sont solutions alors en appliquant la relation initiale on obtient $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$ et donc $|x-y| \le k|x-y|$ d'où $x = y$ car $k < 1$.

Existence : Considérons $g : x \mapsto f(x) - x$ définie et continue sur $I = [\alpha, \beta]$.

On a $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \ge 0$ car $f(\alpha) \in I = [\alpha,\beta]$ et $g(\beta) = f(\beta) - \beta \le 0$ car $f(\beta) \in I = [\alpha,\beta]$.

Par le TVI, g s'annule en un certain $\xi \in [a,b]$ qui donne $f(\xi) = \xi$.

2.a Puisque $f : I \to I$, la suite est bien définie et formée d'éléments de I .

2.b $|u_{n+1} - \xi| = |f(u_n) - f(\xi)| \le k|u_n - \xi|$. Par une récurrence aisée : $|u_n - \xi| \le k^n |u_0 - \xi|$.

2.c Quand $n \to +\infty$, $k^n \to 0$ car $k \in [0,1[$ et donc par comparaison $|u_n - \xi| \to 0$ puis $u_n \to \xi$.

Partie III

1. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, g est de classe $\mathcal{C}^1$.

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2.a U est ouvert et $(a,b)\in U$ donc il existe $r_1>0$ tel que $[a-r_1,a+r_1]\times[b-r_1,b+r_1]$ soit inclus dans U.

La fonction $(x,y)\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ est continue en (a,b) donc pour $\varepsilon=1$, il existe $r_2>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[a-r_2,a+r_2]\times[b-r_2,b+r_2]\cap U$ on ait $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)\right|\le 1$

et donc $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right|\le\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)\right|+1=K$ en vertu de l'inégalité triangulaire renversée.

La fonction $(x,y)\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ est continue en (a,b) donc pour $\varepsilon=1/2$, il existe $r_3>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[a-r_3,a+r_3]\times[b-r_3,b+r_3]\cap U$ on ait : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right|\le\dfrac{1}{2}$.

et donc $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right|\le\dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$.

Posons $r=\min(r_1,r_2,r_3)>0$ et $D=[a-r,a+r]\times[b-r,b+r]$.

On a $D\subset U$ et pour tout $(x,y)\in D$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right|\le K$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right|\le\dfrac{1}{2}$.

2.b Considérons l'application $h:t\mapsto g(t,y)$ définie sur le segment d'extrémités x et x'

h est de classe $\mathcal{C}^1$ et $h'(t)=\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,y)$ donc $|h'(t)|\le K$.

Par l'IAF : $|h(x)-h(x')|\le K|x-x'|$ d'où l'inégalité voulue.

2.c Considérons l'application $k:t\mapsto g(x,t)$ définie sur le segment d'extrémités y et y'.

k est de classe $\mathcal{C}^1$ et $k'(t)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,t)$ donc $|k'(t)|\le 1/2$.

Par l'IAF : $|k(y)-k(y')|\le\dfrac{1}{2}|y-y'|$ d'où l'inégalité voulue.

2.d Prenons $\alpha=\min(r,\dfrac{r}{2K})>0$ et $I=[a-\alpha,a+\alpha]$.

On a $I\times[b-r,b+r]\subset D\subset U$ et pour tout $x\in I$,

$|g(x,b)-g(a,b)|\le K|x-a|\le K\alpha=\dfrac{r}{2}$.

3.a Notons que $g(a,b)=b$.

Pour tout $(x,y)\in I\times J$, $g(x,y)-g(a,b)=g(x,y)-g(x,b)+g(x,b)-g(a,b)$

donc $|g(x,y)-g(a,b)|=|g(x,y)-g(x,b)|+|g(x,b)-g(a,b)|\le\dfrac{1}{2}|y-b|+\dfrac{r}{2}\le\dfrac{1}{2}r+\dfrac{1}{2}r=r$.

Par suite $g(x,y)\in J$.

On a $y\mapsto g(x,y)$ définie sur J à valeurs dans J et pour tout $y,y'\in J$, $|k(y)-k(y')|\le\dfrac{1}{2}|y-y'|$ donc c'est une application contractante.

3.b En appliquant les résultats de la partie II à la fonction $k:y\mapsto g(x,y)$ sur J, on peut dire qu'il existe un unique $y\in J$ tel que $k(y)=y$ i.e. $y-\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}f(x,y)=y$ soit encore $f(x,y)=0$.

Puisque $f(a,b)=0$ avec $a\in I$ et $b\in J$ on a $\varphi(a)=b$.

3.c On a $\varphi(x)=g(x,\varphi(x))$ donc

$|\varphi(x)-\varphi(x')|=|g(x,\varphi(x))-g(x',\varphi(x'))|\le|g(x,\varphi(x))-g(x',\varphi(x))|+|g(x',\varphi(x))-g(x',\varphi(x'))|$.

Or $|g(x,\varphi(x))-g(x',\varphi(x))|\le K|x-x'|$ et $|g(x',\varphi(x))-g(x',\varphi(x'))|\le\dfrac{1}{2}|\varphi(x)-\varphi(x')|$

donc $\left|\varphi(x)-\varphi(x')\right| \leq 2K\left|x-x'\right|$.

φ est continue car lipschitzienne.

Le résultat précédent correspondent au théorème des fonctions implicites.

C'est celui-ci qui justifie que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

4. Par composition, $x \mapsto f(x,\varphi(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x,\varphi(x))\big) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))$.

Or $f(x,\varphi(x)) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) = 0$

puis en évaluant en $x = a$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \varphi'(a)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ d'où enfin $\varphi'(a) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Big/\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Partie IV

1.a Pour tout $x \in I$, $(x,\varphi(x)) \in I \times J \subset U$ et $f(x,\varphi(x)) = 0$ donc $(x,\varphi(x)) \in \Gamma$.

Si (a,b) est un extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$ alors la fonction $x \mapsto F(x,\varphi(x))$ admet un extremum en a. Or $x \mapsto F(x,\varphi(x))$ est dérivable et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(F(x,\varphi(x))\big) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))$

donc en a : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) + \varphi'(a)\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ et donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ compte tenu de la valeur de $\varphi'(a)$ obtenue en III.4

1.b Certes on présume que non, donnons un contre exemple.

Prenons $f(x,y) = y$ et $F(x,y) = x^3$ .de sorte que $\Gamma = (Ox)$ et que F sur Γ corresponde à la fonction d'élévation au cube. $(a,b) = (0,0)$ vérifie la relation de IV.1.a mais ne correspond pas à un extremum lié.

2. Il s'agit ici d'inverser les variables x et y.

Posons $g(x,y) = f(y,x)$ et $G(x,y) = F(y,x)$.

On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ et de même pour F et G.

On peut alors appliqué le résultat de IV.1.a à la fonction G présentant en (b,a) un extremum lié à la relation $G(x,y) = 0$ ce qui donne : $\dfrac{\partial G}{\partial x}(b,a)\dfrac{\partial g}{\partial y}(b,a) - \dfrac{\partial G}{\partial y}(b,a)\dfrac{\partial g}{\partial x}(b,a) = 0$

puis $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ comme voulu.

Partie V

1. Posons x,y les deux côtés du triangle autre que son hypoténuse avec $(x,y) \in U = (\mathbb{R}^{+}*)^2$.

Considérons $f(x,y) = x + y + \sqrt{x^2+y^2} - \ell$ et $F(x,y) = \dfrac{1}{2}xy$.

Si a et b sont les côtés du triangle cherché alors (a,b) est un extremum de $F(x,y)$ lié par la relation $f(x,y) = 0$ donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$

c'est à dire $\dfrac{1}{2}b\Big(1+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big) - \dfrac{1}{2}a\Big(1+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big) = 0$ qui donne $a = b$ et donc $a = b = \dfrac{\ell}{2+\sqrt{2}}$.

Finalement le triangle cherché est rectangle isocèle.

2. On introduit un repère dont l'origine est le centre du cercle circonscrit de rayon R.

Quitte à appliquer une rotation, on peut supposer que le sommet commun aux côtés égaux soit le point de coordonnées $(R,0)$. Les deux autres sommets du triangles sont alors d'ordonnées strictement positive et

strictement négative.
Considérons $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$ et $F(x,y) = (R-x)y$.
L'équation $f(x,y) = 0$ caractérise les points du cercle, la quantité $F(x,y)$ (avec $y > 0$) correspond à l'aire du triangle isocèle étudié quand le sommet d'ordonnée strictement positive est de coordonnées (x,y) .
Si (a,b) sont les coordonnées du sommet d'ordonnée strictement positive d'un triangle solution alors (a,b) est un extremum de $F(x,y)$ lié à la relation $f(x,y) = 0$. On a donc : $-b^2 - (R-a)a = 0$ d'où $a^2 - b^2 - aR = 0$. Or $a^2 + b^2 = R^2$ donc $2a^2 - aR - R^2 = 0$ de racines R et $-R/2$.
Seule la racine $-R/2$ est à considérer et elle conduit à la hauteur $3R/2$.