Parties orthocentriques

Le plan géométrique est supposé rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle *triangle* tout ensemble formé de trois points non alignés du plan.

Partie I : Orthocentre

1. Soit ABC un triangle du plan

1.a Etablir que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0\ .$$

En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H appelé *orthocentre* de ce triangle.

1.b Justifier l'existence d'un cercle unique passant par les points A,B,C .

1.c Soit Ω le centre du cercle défini ci-dessus et K le point déterminé par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\Omega K}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}\ .$$

Etablir que K est l'orthocentre H du triangle ABC .
En déduire que les points Ω,H et le point G , isobarycentre des points A,B,C , sont alignés.

2. Soit A,B et C les points de coordonnées $(1,4)$, $(-2,-3)$ et $(4,-1)$.
Justifier que A,B,C ne sont pas alignés et déterminer les coordonnées des points Ω,H,G définis ci-dessus.

3. Etant donnés deux points A et B du plan et un point H , à quelle(s) condition(s) existe t'il un unique triangle dont A et B en soient sommets et H orthocentre ?

Partie II : Partie orthocentrique

Etant donnée une partie X formée de points du plan non tous alignés, on dira que la partie X est *orthocentrique* ssi tout orthocentre d'un triangle de points de X appartient à X .

1. Dans cette question, on s'intéresse aux parties orthocentriques finies.

1.a Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.

1.b Soit ABC un triangle non rectangle et D son orthocentre.
Montrer que $\{A,B,C,D\}$ est une partie orthocentrique à quatre éléments

1.c Existe t'il d'autres parties orthocentriques formées de quatre points ?

1.d Donner un exemple de partie orthocentrique formée de cinq points ?

2. Montrer que la réunion de deux droites orthogonales est une partie orthocentrique.

3. Soit k un réel non nul et X l'hyperbole d'équation $xy=k$.

3.a Soit A,B,C,D quatre points distincts de X d'abscisses respectives a,b,c,d . Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ssi $abcd=-k^2$.

3.b Soit A,B,C trois points distincts de X d'abscisses respectives a,b,c .
Montrer que ABC forme un triangle et en déterminer l'orthocentre.

3.c Montrer que X est orthocentrique.

Correction

d'après Concours général 2003

Partie I

1.a En écrivant $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$ on obtient
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}\cdot\vec{o}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
Les hauteurs issues de A et de B ne sont pas parallèles car orthogonales aux droites (BC) et (CA) elles-mêmes non parallèles. Soit H le point de concours de ces deux hauteurs. On a $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ donc par la relation ci-dessus $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Par conséquent, H figure sur la hauteur issue de C . Les trois hauteurs sont concourantes.

1.b Les médiatrices des segments $[A,B]$ et $[A,C]$ ne sont pas parallèles car les droites (AB) et (AC) ne le sont pas. Soit Ω le point de concours de ces médiatrices. On a $\Omega A=\Omega B$ et $\Omega A=\Omega C$ donc le cercle de centre Ω et de rayon ΩA passe pas A,B,C . De plus si Ω' est le centre d'un cercle passant par A,B,C alors Ω' est équidistant de A,B,C et donc Ω' est à l'intersection des médiatrices des segments $[A,B]$ et $[A,C]$. Par suite $\Omega' = \Omega$ et le cercle en question est celui de centre Ω et de rayon ΩA.

1.c $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C})\cdot\overrightarrow{BC}$ donc

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C})\cdot(\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{\Omega C}) = \Omega C^2 - \Omega B^2 = 0$.

Ainsi K figure sur la hauteur issue de A. De même pour les deux autres hauteurs. On peut conclure $K = H$.

De la relation $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}$ on tire $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$ donc les points Ω, G, H sont alignés (dans cet ordre).

2. Aisément $G(1,0)$.

Les hauteurs issues de B et C ont pour équations : $3x-5y=9$ et $3x+7y=5$ donc $K(22/9,-1/3)$.

Enfin, sachant $\overrightarrow{G\Omega} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$, on obtient $\Omega(5/18,1/6)$.

3. Si $H = A$ alors il existe une infinité de triangle (rectangle en A) solution. Idem si $H = B$. Supposons désormais $H \neq A,B$.
Le troisième sommet du triangle cherché est caractérisé comme appartenant à l'intersection de la droite orthogonale à (AH) passant par B et de la droite orthogonale à (BH) passant par A.

Si $H \notin (AB)$ alors ces deux droites n'étant pas parallèles, cette intersection définit un point unique.
Si $H \in (AB)$ alors ces deux droites sont parallèles distinctes et l'intersection étudiée est vide.
Finalement, il existe un unique triangle dont A et B sont sommets et H orthocentre ssi $H \notin (AB)$.

Partie II

1.a Si une partie orthocentrique est formée de trois éléments (non alignés), alors l'orthocentre du triangle formé par ces éléments est l'un de ces éléments. Par conséquent l'orthocentre du triangle en étant un sommet, le triangle est rectangle. Inversement, les trois sommets d'un triangle rectangle forment bien une partie orthocentrique.

1.b On vérifie aisément que si D est l'orthocentre de ABC, triangle non rectangle, alors D ne figure par sur la réunion des droites (AB), (BC) et (CA) et que de plus A est l'orthocentre de BCD, B est l'orthocentre de CDA et C est l'orthocentre de DAB. La partie $\{A,B,C,D\}$ est donc bien une partie orthocentrique a exactement quatre éléments.

1.c Les quatre sommets d'un rectangle forment une partie orthocentrique. Aussi les trois sommets d'un triangle rectangle accompagnés du pied de la hauteur issue du sommet rectangle.

1.d Les quatre sommets d'un carré et son centre forme une partie orthocentrique à cinq points.

2. Pour former un triangle, deux points figurent sur l'une des droites, l'autre figure sur l'autre droite qui est alors hauteur du triangle en question. Par conséquente, l'orthocentre du triangle appartient à la réunion des deux droites. Celle-ci forme donc une partie orthocentrique.

3.a $A(a,k/a)$, $B(b,k/b)$, $C(c,k/c)$, $D(d,k/d)$.

$\overrightarrow{AB}\left(b-a,\dfrac{k(a-b)}{ab}\right)$, $\overrightarrow{CD}\left(d-c,\dfrac{k(c-d)}{cd}\right)$ donc

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \dfrac{(b-a)(c-d)(abcd+k^2)}{abcd}$ puis la conclusion.

3.b $\overrightarrow{AB}\left(b-a,\dfrac{k(a-b)}{ab}\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(c-a,\dfrac{k(a-c)}{ac}\right)$.

A,B,C alignés ssi $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$ ce qui donne l'équation :
$\dfrac{k(b-a)(a-c)(b-c)}{abc} = 0$ qui n'a pas de solution avec a,b,c distincts.

Soit D le point de X d'abscisse $d = -k^2/abc$ de sorte que $abcd = -k^2$.

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ donc D figure sur la hauteur issue de C.

Mais on a aussi $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ car toujours $abcd = -k^2$. Il en découle que D figure aussi sur les hauteurs issues de A et de B.
Finalement D est l'orthocentre du triangle ABC.

3.c Le point D de l'étude ci-dessus appartient à X.