Correction

Partie I

1. Le triangle (MNH) est rectangle en H donc $MN^2 = MH^2 + HN^2 \geq MH^2$ avec égalité ssi $HN^2 = 0$.
Ainsi $MN \geq MH$ avec égalité ssi $N = H$.

2. $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\|$ or $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{o}$ par produit vectoriel de vecteurs colinéaires et $\left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\|\left\|\vec{u}\right\|$ car les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Par suite $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = HM\left\|\vec{u}\right\|$ et donc $d(M,\mathcal{D}) = HM = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

3. La droite $\mathcal{D}$ passe par $A\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{vmatrix}0\\1\\-1\end{vmatrix}$ (vecteur colinéaire à celui obtenu par $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix} \wedge \vec{m}\begin{vmatrix}2\\-1\\-1\end{vmatrix}$).

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\begin{vmatrix}-4\\1\\1\end{vmatrix}$ donc $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{\sqrt{16+1+1}}{\sqrt{2}} = 3$.

Partie II

1.a $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta = 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ donc $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$.

$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ donc $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

1.b Posons $\vec{i} \cdot \vec{j} = \dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|} \cdot \dfrac{\vec{u}-\vec{v}}{\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|}$ or $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2 = 0$ donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Les vecteur $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux donc $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct car $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

1.c $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\big((\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v})\big) = \dfrac{1}{2}(2\cos\dfrac{\theta}{2}\vec{i} + 2\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{j}) = \cos\dfrac{\theta}{2}\vec{i} + \sin\dfrac{\theta}{2}\vec{j}$.

$\vec{v} = \dfrac{1}{2}\big((\vec{u}+\vec{v}) - (\vec{u}-\vec{v})\big) = \dfrac{1}{2}(2\cos\dfrac{\theta}{2}\vec{i} - 2\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{j}) = \cos\dfrac{\theta}{2}\vec{i} - \sin\dfrac{\theta}{2}\vec{j}$.

1.d $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc à $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ et donc $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Par suite $\overrightarrow{OH} = a\vec{k}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Puisque que $O = m\big[HH'\big]$, on a $\overrightarrow{OH'} = -\overrightarrow{OH} = a\vec{k}$.
Enfin $a \neq 0$ car $H \neq H'$ puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes.

2.a $d(M,\mathcal{D}) = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = \sqrt{(z-a)^2 + \left(y\cos\dfrac{\theta}{2} - x\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$.

$d(M,\mathcal{D}') = \left\|\overrightarrow{H'M} \wedge \vec{v}\right\| = \sqrt{(z+a)^2 + \left(y\cos\dfrac{\theta}{2} + x\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$.

2.b $M \in \Sigma \Leftrightarrow d(M,\mathcal{D})^2 = d(M,\mathcal{D}')^2 \Leftrightarrow xy\sin\theta + 2az = 0$.
Donc $\Sigma : xy\sin\theta + 2az = 0$.

3.a Si M a pour coordonnées x,y dans Π_h, ses coordonnées dans l'espace sont x,y,h.

Un tel point appartient à Σ ssi $xy = \lambda$ avec $\lambda = -\dfrac{2ah}{\sin\theta}$.

3.b Si $h=0$ alors $\Sigma \cap \Pi_h$ est la réunion des axes (Ox) et (Oy).

Si $ah \neq 0$ alors $\Sigma \cap \Pi_h$ est une hyperbole du plan Π_h graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$.

4.a Si M a pour coordonnées t, z dans Π_φ, ses coordonnées dans l'espace sont $x = t\cos\varphi, y = t\sin\varphi, h$.

Un tel point appartient à Σ ssi $t^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin\theta + 2az = 0$.

4.b Si $\cos\varphi\sin\varphi = 0$ (i.e. $\varphi = 0 \quad [\pi/2]$) alors $\Sigma \cap \Pi_\varphi$ est la droite intersection de Π_φ et du plan (xOy).

Si $\cos\varphi\sin\varphi \neq 0$ alors une équation de $\Sigma \cap \Pi_\varphi$ est $t^2 = pz$ avec $p = -2a\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta$.

Il s'agit d'une parabole d'axe focal vertical.