Points équidistants de deux droites

Partie I

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace géométrique passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.
Soit M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.

1. Montrer que pour tout point N de la droite $\mathcal{D}$, on a $MN \geq MH$ avec égalité ssi $N = H$.
2. On appelle distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ le réel : $d(M,\mathcal{D}) = MH$.

   Montrer que $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.
3. Déterminer la distance du point $M\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$ à la droite $\mathcal{D}:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=-1\end{cases}$.

Partie II

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires dirigées par des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On étudie Σ l'ensemble des points M équidistants de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$ i.e. tels que $d(M,\mathcal{D}) = d(M,\mathcal{D}')$.
On note :

- Δ la perpendiculaire commune,
- H et H' les points de concours de Δ avec les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$,
- O le milieu du segment $[HH']$.

1. On note $\theta \in \left]0,\pi\right[$ l'écart angulaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1.a Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

1.b On pose $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}$, $\vec{j} = \dfrac{\vec{u}-\vec{v}}{\|\vec{u}-\vec{v}\|}$ et $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

Montrer que $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.
Désormais l'espace sera supposé muni de ce repère.

1.c Observer que $\vec{u} = \cos\dfrac{\theta}{2}\vec{i} + \sin\dfrac{\theta}{2}\vec{j}$, $\vec{v} = \cos\dfrac{\theta}{2}\vec{i} - \sin\dfrac{\theta}{2}\vec{j}$.

1.d Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{OH} = a\vec{k}$ et $\overrightarrow{OH'} = -a\vec{k}$.

2. Soit M un point de coordonnées x,y,z.

2.a Exprimer $d(M,\mathcal{D})$ et $d(M,\mathcal{D}')$ en fonction de x,y,z,a et θ.

2.b Former une équation cartésienne de l'ensemble Σ.

3. Pour $h \in \mathbb{R}$, on note Π_h le plan d'équation $z = h$.

On munit ce plan du repère $(\Omega_h,\vec{i},\vec{j})$ où Ω_h est le point d'intersection de Π_h et de (Oz).

3.a A quelle condition un point M de coordonnées x,y de Π_h appartient–il à Σ ?

3.b Préciser la nature de la courbe intersection de Σ avec Π_h.

4. Pour $\varphi \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}_\varphi = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$ et on considère Π'_φ le plan dont $(O;\vec{u}_\varphi,\vec{k})$ est un repère.

4.a A quelle condition un point M de coordonnées t,z de Π'_φ appartient-il à Σ ?

4.b Préciser la nature de la courbe intersection de Σ avec Π'_φ.