Polygone convexe du plan

Dans tout le problème $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de ce plan est noté $(\vec{u} \mid \vec{v})$ et la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$.

L'objet de ce problème est d'étudier les polygones convexes du plan.
Tous les demi-plans F considérés dans ce problème seront supposés fermés, c'est à dire incluant leur droite limite $\mathcal{D}$.

Définitions générales :

On appelle *combinaison convexe* des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tout point pouvant s'écrire comme barycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés de masses $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Soit A, B deux points du plan $\mathcal{P}$. On appelle *segment* d'extrémités A et B l'ensemble $[A, B]$ formé des points M combinaison convexe des points A et B.

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) une famille de points du plan $\mathcal{P}$. On appelle *enveloppe convexe* de la famille de points $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ l'ensemble $Conv(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ formé des points M combinaisons convexes des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
En particulier $[A, B] = Conv(A, B)$.

Soit $\mathcal{C}$ une partie du plan $\mathcal{P}$. On dit que $\mathcal{V}$ est *convexe* ssi $\forall A, B \in \mathcal{C}, [A, B] \subset \mathcal{C}$.

Partie I

1. Premiers exemples de parties convexes.
1.a Montrer que tout disque fermé est convexe.
1.b Montrer que tout demi-plan du plan $\mathcal{P}$ est convexe.
1.c Montrer que tout enveloppe convexe d'une famille de points est convexe.
2. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux convexes du plan $\mathcal{P}$.
2.a Montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est convexe.
2.b Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute combinaison convexe de n points de $\mathcal{C}$ est encore un point de $\mathcal{C}$.
3. Soit A_1, A_2, A_3 trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$.
On appelle triangle de sommets A_1, A_2, A_3 l'ensemble $\mathcal{T} = Conv(A_1, A_2, A_3)$.
On note F_1 le demi-plan délimité par la droite (A_2A_3) et contenant le point A_1.
On définit de même, par permutation circulaire, les demi-plans F_2 et F_3.
3.a Justifier que $\mathcal{T} \subset F_1 \cap F_2 \cap F_3$.
3.b On introduit le repère affine $\mathcal{R} = (A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$ et on note (x, y) les coordonnées des points $M \in \mathcal{P}$.
Par quelles inéquations, relatives au repère $\mathcal{R}$, les demi-plans F_1, F_2 et F_3 sont-ils définis ?
3.c Etablir $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \subset \mathcal{T}$ et conclure.
4. On reprend les notations et les hypothèses de la question 3.
On pose O l'isobarycentre des points A_1, A_2, A_3.
4.a Justifier que $O \notin (A_1A_2) \cup (A_2A_3) \cup (A_3A_1)$.

4.b En déduire qu'il existe $r>0$ tel que $D(O,r)\subset \mathcal{T}$
(avec $D(O,r)$ le disque de centre O et de rayon r).

Partie II

Dans l'intégralité de cette partie, O désigne un point du plan $\mathcal{P}$ fixé.
Pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$, on note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble défini par $\mathcal{A}^*=\left\{M\in\mathcal{P}/\forall A\in\mathcal{A},\left(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA}\right)\le 1\right\}$.

Cette partie $\mathcal{A}^*$ est appelé dual de la partie $\mathcal{A}$ en O .

1. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties du plan $\mathcal{P}$.

1.a Montrer que $\mathcal{A}^*$ est un convexe contenant O .

1.b Etablir l'implication : $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{B}^*\subset\mathcal{A}^*$.

1.c Justifier $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}^{**}$ où $\mathcal{A}^{**}$ se comprend comme étant le dual en O du dual en O de $\mathcal{A}$.

2.a Déterminer $\mathcal{P}^*$ puis $\{O\}^*$.

2.b Soit $r>0$.
Etablir : $\left(D(O,r)\right)^*=D(O,1/r)$.

3. Soit H un point du plan $\mathcal{P}$ différent de O .

3.a On note $\mathcal{D}=\left\{M\in\mathcal{P}/\left(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OH}\right)=1\right\}$.
Montrer que $\mathcal{D}$ est une droite perpendiculaire à (OH) en un point K à préciser.

3.b Etablir que $\{H\}^*$ est le demi-plan délimité par $\mathcal{D}$ et contenant le point O .
Indice : on pourra introduire un repère orthonormé adapté au problème étudié.

4. On étudie maintenant le problème inverse :
Soit F un demi-plan contenant le point O et délimité par une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O .
Justifier l'existence d'un point H du plan $\mathcal{P}$ tel que $F=\{H\}^*$.

Partie III

On appelle polyèdre convexe toute partie bornée de $\mathcal{P}$ pouvant s'écrire comme intersection d'un nombre fini de demi-plans.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(F_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de demi-plans. Pour tout $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, on note $\mathcal{D}_i$ la droite délimitant le demi-plan F_i et on considère le polyèdre $\mathcal{C}=\bigcap\limits_{1\le i\le n}F_i$.
On suppose que $\mathcal{C}$ est borné, on dit alors que $\mathcal{C}$ est un polygone.
Pour tout $1\le i\le n$, l'intersection $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}_i$, lorsqu'elle est non vide, est un segment du plan.
On l'appelle arête du polygone $\mathcal{C}$ et ses extrémités sont appelés sommets de $\mathcal{C}$.
Tout point de $\mathcal{C}$ ne figurant pas sur une arête de $\mathcal{C}$ est dit intérieur à $\mathcal{C}$.
On suppose que de tels points existent, on dit alors que $\mathcal{C}$ est non aplati.

1. Soit O un point du polygone $\mathcal{C}$ et δ une demi-droite d'origine O .
On note $I=\left\{i\in\{1,2,\ldots,n\}/\delta\not\subset F_i\right\}$ et $J=\left\{i\in\{1,2,\ldots,n\}/\delta\subset F_i\right\}$.

1.a Justifier que $I\neq\varnothing$.

1.b Pour $i\in I$, on note A_i le point intersection de δ et $\mathcal{D}_i$ de sorte que $\delta\cap F_i=[O,A_i]$.
On pose $d=\min\limits_{i\in I}OA_i$ et on note $i_0\in\{1,2,\ldots,n\}$ un indice tel que $d=OA_{i_0}$.
En distinguant selon que $i\in I$ ou $i\in J$, établir : $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},A_{i_0}\in F_i$.

1.c Conclure que $\delta\cap\mathcal{C}=\left[O,A_{i_0}\right]$.

2. Montrer que l'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et du polygone $\mathcal{C}$ est soit vide, soit égale à un segment dont les deux extrémités appartiennent aux arêtes de $\mathcal{C}$.

3. Notons $P_1, P_2, \dots, P_m$ les sommets de $\mathcal{C}$ et formons $\mathcal{C}' = Conv(P_1, P_2, \dots, P_m)$

On désire établir que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

3.a Justifier $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$.

3.b Justifier que les arêtes de $\mathcal{C}$ sont incluses dans $\mathcal{C}'$.

3.c Montrer que tout point intérieur à $\mathcal{C}$ est aussi dans $\mathcal{C}'$ et conclure.

4. Soit O un point intérieur à $\mathcal{C}$.
On reprend la notion de dual introduite dans la partie II.
On veut montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{**}$.
Soit $M \notin \mathcal{C}$

4.a Montrer qu'il existe un demi-plan F_i, avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $M \notin F_i$.

4.b En vertu de l'étude du II.4, on peut introduire un point H tel que $F_i = \{H\}^*$.

Montrer que $H \in \mathcal{C}^*$.

4.c En déduire que $M \notin \mathcal{C}^{**}$.

4.d Conclure.

5. Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points non alignés et $\mathcal{C} = Conv(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

5.a Justifier l'existence d'un point O du plan pour lequel il existe $r > 0$ tel que $D(O, r) \subset \mathcal{C}$.
On reprend la notion de dual introduite dans la partie II définie à partir du point précédent.

5.b Montrer que $\mathcal{C}^* = \bigcap_{1 \le i \le n} \{A_i\}^*$.

5.c Etablir que $\mathcal{C}^*$ est un polygone convexe.

5.d Conclure que $\mathcal{C}$ est lui-même un polygone convexe.