Correction

Partie I

1.a Il est clair que $\forall P\in\mathbb{R}[X],\Delta(P)\in\mathbb{R}[X]$ donc $\Delta:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$.

De plus, soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}[X]$:

$\Delta(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X)$

$=\lambda(P(X+1)-P(X))+\mu(Q(X+1)-Q(X))=\lambda\Delta(P)+\mu\Delta(Q)$

donc Δ est linéaire et par suite $\Delta\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

1.b Si P est constant égal à $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\Delta(P)=\lambda-\lambda=0$.

Si $\deg P\geq 1$ alors, en posant $p=\deg P$, on peut écrire $P=a_pX^p+...+a_1X+a_0$ avec $a_p\neq 0$.

$\Delta(P)=a_p((X+1)^p-X^p)+a_{p-1}((X+1)^{p-1}-X^p)+...+a_1((X+1)-X)$

Or $(X+1)^k-X^k=\binom{k}{1}X^{k-1}+\binom{k}{2}X^{k-2}+\cdots+\binom{k}{k}$ est de degré $k-1$, donc

$\deg(a_p((X+1)^p-X^p))=p-1$ et $\deg((a_{p-1}((X+1)^{p-1}-X^{p-1})+...+a_1((X+1)-X))<p-1$.

Par degré, d'une somme de polynômes de degrés distincts, $\deg\Delta(P)=p-1=\deg P-1$.

2.a De part la question précédente : $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, on a $\deg(\Delta(P))\leq\deg P-1$.

Par suite $\forall P\in\mathbb{R}[X],\deg\Delta(P)<n$ donc $\Delta_n(P)=\Delta(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $\Delta_n:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$. De plus Δ_n est linéaire, car Δ l'est. Ainsi $\Delta_n\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2.b Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

Si $\deg P\leq 0$ alors $\Delta_n(P)=\Delta(P)=0$ donc $P\in\ker\Delta_n$.

Si $\deg P\geq 1$ alors $\deg(\Delta_n(P))=\deg P-1$ donc $\Delta_n(P)\neq 0$ puis $P\notin\ker\Delta_n$.

Finalement $\ker\Delta_n=\mathbb{R}_0[X]$.

2.c Par le théorème du rang : $\mathrm{rg}(\Delta_n)=\dim\mathbb{R}_n[X]-\dim\mathbb{R}_0[X]=n+1-1=n$.

Puisque $\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\deg\Delta_n(P)\leq\deg P-1\leq n-1$ on a $\Delta_n(P)\in\mathrm{R}_{n-1}[X]$ puis $\mathrm{Im}\,\Delta_n\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Par inclusion et égalité des dimensions : $\mathrm{Im}\,\Delta_n=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3.a Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n-1\geq\deg P$.

On a $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{Im}\,\Delta_n$ donc $\exists Q\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta_n(Q)=P$ i.e. : $\Delta(Q)=P$.

Ainsi Δ est surjectif.

3.b Existence :

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, par la surjectivité de Δ, $\exists R\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(R)=P$.

Posons $\lambda=R(0)$ et $Q=R-\lambda$.

On a $Q(0)=C-C=0$ et $\Delta(Q)=\Delta(R)-\Delta(\lambda)=P$.

Unicité :

Soit $Q,\hat{Q}$ deux solutions du problème.

On a $\Delta(Q-\hat{Q})=\Delta(Q)-\Delta(\hat{Q})=P-P=0$ donc $Q-\hat{Q}$ est un polynôme constant en vertu de 1.b

Puisque $(Q-\hat{Q})(0)=Q(0)-\hat{Q}(0)=0$, on conclut $Q-\hat{Q}=0$ puis $Q=\hat{Q}$.

3.c On a $\nabla:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}[X]$

$\Delta(\lambda\nabla(P)+\mu\nabla(Q))=\lambda\Delta(\nabla(P))+\mu\Delta(\nabla(Q))=\lambda P+\mu Q$ et

$(\lambda\nabla(P)+\mu\nabla(Q))(0)=\lambda\nabla(P)(0)+\mu\nabla(Q)(0)=0$ donc on reconnaît $\lambda\nabla(P)+\mu\nabla(Q)=\nabla(\lambda P+\mu Q)$.

Ainsi $\nabla\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

3.d Posons $Q=\nabla(P)$ de sorte que $\Delta(Q)=P$.

$$\sum_{i=0}^{p} P(i)=\sum_{i=0}^{p} \Delta(Q)(i)=\sum_{i=0}^{p} Q(i+1)-Q(i)=Q(p+1)-Q(0)=Q(p+1)$$

Partie II

1.a $\Delta(P_0)=0$.

$$\Delta(P_m)=\frac{1}{m!}\left[(X+1)X\ldots(X-m+2)-X(X-1)\ldots(X-m+1)\right]$$

donne $\Delta(P_m)=\frac{1}{m!}X(X-1)\ldots(X-m+2)\left[X+1-(X-m+1)\right]=P_{m-1}$.

1.b Si $k\le m$ alors $\Delta^k(P_m)=P_{m-k}$ et si $k>m$ alors $\Delta^k(P_m)=0$.

1.c Puisque $P_0(0)=1$ et $P_m(0)=0$, on a $\Delta^k(P_m)(0)=1$ si $k=m$ et $\Delta^k(P_m)(0)=0$ sinon.

2.a $\deg P_m=m$. La famille $\mathcal{B}=(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est une famille de polynômes de degrés étagés, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n\left[X\right]$.

2.b Soit $P\in\mathbb{R}_n\left[X\right]$, puisque $\mathcal{B}$ est une base, $\exists\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $P=\sum_{m=0}^{n}\lambda_m P_m$.

$\forall k\in\left\{0,\ldots,m\right\},\Delta^k(P)=\sum_{m=0}^{n}\lambda_k\Delta^k(P_m)$ puis $\Delta^k(P)(0)=\sum_{m=0}^{n}\lambda_k\Delta^k(P_m)(0)=\lambda_k$.

Par suite $P=\sum_{m=0}^{n}\Delta^m(P)(0)P_m$.

2.c Puisque $\Delta(P_{m+1})=P_m$ et $P_{m+1}(0)=0$, on a $\nabla(P_m)=P_{m+1}$.

Par suite $\nabla(P)=\sum_{m=0}^{n}\Delta^m(P)(0)P_{m+1}$.

3.a $\Delta^0(X^3)=X^3,\Delta(X^3)=3X^2+3X+1,\Delta^2(X^3)=6X+6$ et $\Delta^3(X^3)=6$

donc $\Delta^0(X^3)(0)=0,\Delta(X^3)(0)=1,\Delta^2(X^3)(0)=6$ et $\Delta^3(X^3)(0)=6$.

Par suite $\nabla(X^3)=\frac{X(X-1)}{2}+X(X-1)(X-2)+\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4}$

puis $\nabla(X^3)=\frac{X(X-1)}{4}(2+4X-8+X^2-5X+6)=\frac{X^2(X-1)^2}{4}$.

3.b $\sum_{i=0}^{m} i^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$.