Correction

1.a $0 \in E_0$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E_0$.

$\int_0^{2\pi} (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \mu \int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0$ donc $\lambda f + \mu g \in E_0$.

Par suite E_0 est un sous-espace vectoriel de E.

D'autre part, la fonction nulle est une fonction constante et toute combinaison linéaire de fonctions constantes est une fonction constante.

Par suite $Const$ est un sous-espace vectoriel de E.

1.b Soit $f \in E_0 \cap Const$.

D'une part, f est une fonction constante, posons C sa valeur.

D'autre part, $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ donc $\int_0^{2\pi} C\,dt = 2\pi C = 0$ puis $C = 0$.

On conclut $E_0 \cap Const = \{0\}$.

Soit $f \in F$. Posons $C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Considérons :

h la fonction constante égale à C et g la fonction définie par $g = f - h$.

Pour ces fonctions on a :

$f = g + h$: clair

$h \in Const$: clair

et $g \in E_0$ car $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt - 2\pi C = 0$.

Ainsi $E_0 + Const = E$.

Finalement $E_0 \oplus Const = E$.

1.c $0 \in P$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in P$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$(\lambda f + \mu g)(x + 2\pi) = \lambda.f(x + 2\pi) + \mu.g(x + 2\pi) = \lambda.f(x) + \mu.g(x) = (\lambda.f + \mu.g)(x)$

Donc $\lambda f + \mu g \in P$ et ainsi P est un sous-espace vectoriel de E.

1.d $P_0 = P \cap E_0$ (on peut guère faire plus rapide)

2.a Existence :

Soit F une primitive de f.

Comme $F \in E = E_0 \oplus Const$, on peut écrire $F = F_0 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

F_0 est alors primitive de f et $F_0 \in E_0$.

Unicité :

Soit F_0 et F_1 deux primitives solutions.

$\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $F_0 = F_1 + C$.

Mais alors $C = F_0 - F_1 \in E_0$ d'où $C = 0$ puisque $Const \cap E_0 = \{0\}$.

Ainsi $F_0 = F_1$.

2.b Soit $f, g \in E$. Si $L(f) = L(g)$ alors $L(f)' = L(g)'$ d'où $f = g$.

Ainsi L est injective.

En revanche, toute valeur prise par L appartient par définition à $E_0 \neq E$.

Par suite L n'est pas surjective, ni a fortiori bijective.

3.a $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt$.

Or $\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt \underset{x=t-2\pi}{=} \int_0^a f(x+2\pi)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt$

d'où $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

3.b Si f possède une primitive F 2π périodique alors

$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = F(2\pi) - F(0) = 0$ donc $f \in P_0$.

Inversement, si $f \in P_0$ alors considérons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$.

F est une primitive de f et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = F(x)$

car $\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.

3.c $L(f)$ est une primitive de $f \in P_0$, donc $L(f)$ se déduit d'une fonction 2π périodique par l'addition d'une constante, c'est donc une fonction 2π périodique. De plus, par définition $L(f) \in E_0$ donc $L(f) \in P_0$.

4.a B_1 est primitive de $B_0 : t \mapsto 1$ donc B_1 de la forme $B_1 : t \mapsto t + C$.

De plus $\int_0^{2\pi} B_1(t)\,dt = 0$ donc $C = -\pi$ puis $B_1(t) = t - \pi$.

B_2 est primitive de B_1 donc B_2 de la forme $B_2 : t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2 - \pi t + C$.

De plus $\int_0^{2\pi} B_2(t) = \dfrac{(2\pi)^3}{6} - \dfrac{\pi(2\pi)^2}{2} + 2\pi C$ donc $C = \dfrac{\pi^2}{3}$.

Ainsi $B_2(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - \pi t + \dfrac{\pi^2}{3}$.

4.b $\forall n \geq 1$ on a $B_n \in E_0$ donc $\int_0^{2\pi} B_n(t)\,dt = \left[B_{n+1}(t)\right]_0^{2\pi} = 0$.

Ainsi $\forall n \geq 1, B_{n+1}(2\pi) = B_{n+1}(0)$ puis la propriété demandée.

5.a $\varphi_n(f)(x+2\pi) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_n(t) f(x+2\pi+t)\,dt = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_n(t) f(x+t)\,dt = \varphi_n(f)(x)$

Donc $\varphi_n(f)$ est 2π périodique.

5.b On observe que $t \mapsto \mathcal{L}(f)(x+t)$ est primitive de $t \mapsto f(x+t)$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (t-\pi) f(x+t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[(t-\pi)\mathcal{L}(f)(x+t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{L}(f)(x+t)dt \\
&= \frac{\pi\mathcal{L}(f)(x+2\pi) + \pi\mathcal{L}(f)(x)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} \mathcal{L}(f)(u)\,du \\
&= \mathcal{L}(f)(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{L}(f)(u)du = \mathcal{L}(f)(x)
\end{aligned}$$

(en exploitant pleinement $\mathcal{L}(f) \in P_0$)

5.c Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
&\varphi_{n+1}(f)(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_{n+1}(t) f(x+t)\,dt \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left[B_{n+1}(t)\mathcal{L}(f)(x+t)\right]_0^{2\pi} - \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_{n+1}'(t)\mathcal{L}(f)(x+t)\,dt \\
&= 0 + \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_n(t)\mathcal{L}(f)(x+t)\,dt = \varphi_n(\mathcal{L}(f))(x)
\end{aligned}$$

5.d Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ ou de la manière suivante :

$\varphi_n(f) = \varphi_{n-1}(\mathcal{L}(f)) = \ldots = \varphi_1(\mathcal{L}^{n-1}(f)) = \mathcal{L}^n(f)$.