Résolution d'une équation diophantienne

L'objectif de ce problème est la résolution de l'équation $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

On admettra l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

On introduit l'ensemble $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \,/\, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

Partie I

1. Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ muni de l'addition et de la multiplication des réels est un anneau.

2.a Etablir $\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], \exists!(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

On pose alors $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$ appelé conjugué de x.

2.b Montrer que l'application de conjugaison $x \mapsto \overline{x}$ est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

3. Pour $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on pose $N(x) = x\overline{x}$.

3.a Justifier que $\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], N(x) \in \mathbb{Z}$, et

$\forall x, x' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], N(xx') = N(x)N(x')$.

3.b Montrer que $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est inversible ssi $N(x) \in \{1, -1\}$.

3.c On forme $H = \left\{x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] / N(x) = \pm 1\right\}$.

Justifier par un argument rapide que H est un groupe pour la multiplication des réels.

Partie II

On se propose dans cette partie de décrire l'ensemble H, ce qui correspond à la résolution de l'équation initialement proposée.

1. Soit $x = a + b\sqrt{2} \in H$. Montrer :

1.a $a \geq 0$ et $b \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

1.b $a \leq 0$ et $b \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$.

1.c $ab \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 1$.

2. On note $H^+ = \{x \in H \,/\, x > 1\}$.

2.a Montrer que si $x = a + b\sqrt{2} \in H^+$ alors $a > 0$ et $b > 0$.

2.b En déduire que $u = 1 + \sqrt{2}$ est le plus petit élément de H^+.

3. Soit $x \in H^+$.

3.a Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $u^n \leq x < u^{n+1}$.

3.b En déduire que $x = u^n$.

3.c Conclure que $H = \left\{\pm u^n \,/\, n \in \mathrm{Z}\right\}$.