Correction

Partie I

1. Soit $z \in [a,b]$. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $z = \lambda a + (1-\lambda)b$.
Pour $\mu = 1-\lambda$, on a $\mu \in [0,1]$ et $z = \mu b + (1-\mu)a$ donc $z \in [b,a]$.
Ainsi $[a,b] \subset [b,a]$. Par un raisonnement symétrique, $[b,a] \subset [a,b]$ puis l'égalité.

2.a Soit $\alpha, \beta \in [a,b]$. Il existe $\lambda, \mu \in [0,1]$ tels que $\alpha = \lambda a + (1-\lambda)b$ et $\beta = \mu a + (1-\mu)b$.
Soit $z \in [\alpha, \beta]$. Il existe $\gamma \in [0,1]$ tel que $z = \gamma\alpha + (1-\gamma)\beta$.
Mais alors $z = (\gamma\lambda + (1-\gamma)\mu)a + (\gamma(1-\lambda) + (1-\gamma)(1-\mu))b = \theta a + (1-\theta)b$ avec
$\theta = \gamma\lambda + (1-\gamma)\mu \geq 0$ et $1-\theta = \gamma(1-\lambda) + (1-\gamma)(1-\mu) \geq 0$ de sorte que $\theta \in [0,1]$.
Ainsi $z \in [a,b]$ puis $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$. Finalement $[a,b]$ est convexe.

2.b Soit $a, b \in D$. On a $|a|, |b| \leq 1$.
Soit $z \in [a,b]$. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $z = \lambda a + (1-\lambda)b$.
$|z| \leq |\lambda a| + |(1-\lambda)b| = |\lambda||a| + |1-\lambda||b| = \lambda|a| + (1-\lambda)|b| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$ donc $z \in D$.
Ainsi $[a,b] \subset D$. Finalement D est convexe.

3.a Soit $a, b \in C$. Pour tout $i \in I$, $a, b \in C_i$ donc $[a,b] \subset C_i$ car C_i convexe.
Par suite $[a,b] \subset \bigcap_{i \in I} C_i = C$. Ainsi C est convexe.

3.b Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$: $\forall a_1 \in C, \forall \lambda_1 > 0$ on a : $a = \dfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1} = a_1 \in C$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
Soit $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in C$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} > 0$.

$$a = \frac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \times \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1} a_{n+1}}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}$$

donc $a = \mu b + (1-\mu)a_{n+1}$ avec $b = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$ et $\mu = \dfrac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}$.
Puisque $\mu \in [0,1]$, on obtient $a \in [b, a_{n+1}]$, or par hypothèse de récurrence $b \in C$ et puisque $a_{n+1} \in C$ et que C est convexe, on conclut $a \in C$.
Récurrence établie.

4.a En vertu de 3.a, l'intersection d'une famille de convexes étant un convexe, on peut assurer que $\text{Conv}(A)$ est convexe. De plus, pour tout $C \in \mathcal{S}$, on a $A \subset C$ donc $A \subset \bigcap_{C \in \mathcal{S}} C = \text{Conv}(A)$.

4.b Si C est une partie convexe de $\mathbb{C}$ contenant A alors $C \in \mathcal{S}$ et donc $\text{Conv}(A) \subset C$ car une intersection est incluse dans chacune des parties intersectées.

4.c D'une part, $a, b \in [a,b]$ et $[a,b]$ est convexe donc $\text{Conv}(A) \subset [a,b]$.
D'autre part, $a, b \in \text{Conv}(A)$ et $\text{Conv}(A)$ est convexe donc $[a,b] \subset \text{Conv}(A)$.
Finalement $\text{Conv}(A) = [a,b]$.

4.d $U \subset D$ et D est convexe donc $\text{Conv}(U) \subset D$.
Inversement, soit $z \in D$.

Si $z = 0$ alors $z \in [-1,1]$ avec $-1, 1 \in U$ donc $z = 0 \in \text{Conv}(U)$.

Si $z\neq 0$ alors posons $a=\frac{z}{|z|}$ de sorte que $a\in U\subset \text{Conv}(U)$

On a $z\in[a,0]$ car $z=|z|a+(1-|z|).0$ avec $|z|\in[0,1]$.

Or $a,0\in\text{Conv}(U)$ et $\text{Conv}(U)$ est convexe donc $[a,0]\subset\text{Conv}(U)$ puis $z\in\text{Conv}(U)$.

Ainsi $D\subset\text{Conv}(U)$ puis $\text{Conv}(U)=D$.

Partie II

1.a Les racines de P sont les a_i de multiplicité α_i. Celles-ci sont racines de P' de multiplicité α_i-1, par suite les pôles de P'/P sont les a_i et ce sont des pôles de multiplicité $\alpha_i-(\alpha_i-1)=1$.

1.b En introduisant λ coefficient dominant de P, on peut écrire $P=\lambda\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\alpha_i}$.

On a $P'=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(X-a_i)^{\alpha_i-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-a_j)^{\alpha_j}$ donc $\frac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{X-a_i}$.

2.a $\left(\frac{P'}{P}\right)(a)=\frac{P'(a)}{P(a)}=0$ donc $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{a-a_i}=0$ puis $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i(\overline{a}-\overline{a_i})}{|a-a_i|^2}=0$ et en conjuguant on obtient la relation voulue.

2.b On a $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i a}{|a-a_i|^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i a_i}{|a-a_i|^2}$ donc $a=\frac{\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$ avec $\lambda_i=\frac{\alpha_i}{|a-a_i|^2}>0$.

3. Notons $C=\text{Conv}\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Par l'étude ci-dessus : si a est racine de P' sans être racine de P alors on peut écrire $a=\frac{\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$ avec $\lambda_i>0$ et $a_i\in C$. Puisque C est convexe, en vertu de I.3.b, on a $a\in C$.

Si a est racine de P' et racine de P alors a est l'un des a_i et donc $a\in C$.

Dans les deux cas, les racines de P' appartiennent à C.