Correction

d'après E4A PSI 2001

1.a $A\left|\begin{matrix}a\\k/a\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}b\\k/b\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}c\\k/c\end{matrix}\right.$ avec $abc\neq 0$ donc $G\left|\begin{matrix}(a+b+c)/3\\k(ab+bc+ca)/3abc\end{matrix}\right.$.

1.b Par intersections des hauteurs : $H\left|\begin{matrix}-k^2/abc\\-abc/k\end{matrix}\right.$ donc $H\in(\gamma)$.

2.a Pour un triangle équilatéral $G=H$.

2.b a,b,c sont les racines de $P(X)$ avec $P(X)=X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3$ où $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$ et $\sigma_3=abc$.
L'identification des coordonnées de G et H donne :
$\sigma_1=3\lambda$ et $\sigma_2=-3\sigma_3^2/k^2$. Or $\sigma_3=-k^2/\lambda$ donc on parvient au polynôme proposé.

2.c $H\left|\begin{matrix}\lambda\\k/\lambda\end{matrix}\right.$ (avec $\lambda^2\neq k$ car H non sommet de (γ) est le centre du cercle circonscrit dont l'équation est :
$(x-\lambda)^2+\left(y-\frac{k}{\lambda}\right)^2=R^2$ avec $R=HA=HB=HC$.
Les abscisses des points intersections de ce cercle et de (γ) sont les solutions de l'équation :
$(x-\lambda)^2+k^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda}\right)^2=R^2$ soit encore $x^2\lambda^2(x-\lambda)^2+k^2(\lambda-x)^2-\lambda^2x^2R^2=0$.
Cette équation (de degré 4) possède quatre racines (comptées avec multiplicité) parmi lesquels a,b,c.
Par relation coefficients racines, on obtient : La quatrième d vérifie $a+b+c+d=2\lambda$ donc $d=2\lambda-(a+b+c)$. Or $\lambda=(a+b+c)/3$ donc $d=2\lambda-3\lambda=-\lambda$.
Finalement $D\left|\begin{matrix}-\lambda\\-k/\lambda\end{matrix}\right.$ (symétrique de H par rapport à l'origine).

3.a $Q(0)Q(r)<0$.
Si $r>0$ alors $\lim_{-\infty}Q=-\infty$, $Q(0)>0$, $Q(r)<0$ et $\lim_{+\infty}Q=+\infty$.
L'application du théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de racine dans chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,r[$ et $]r,+\infty[$.
Si $r<0$, on obtient de manière semblable des racines dans chacun des intervalles $]-\infty,r[$, $]r,0[$ et $]r,+\infty[$.

3.b Les relations coefficients racines d'un polynôme donnent : $r_1+r_2+r_3=3r$, $\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{r_1r_2r_3}=\frac{3}{r}$ et $r_1r_2r_3=-\frac{k^2}{r}$.
Soit G le centre de gravité et H l'orthocentre du triangle $R_1R_2R_3$.
Par les relations précédentes, on a $G\left|\begin{matrix}r\\k/r\end{matrix}\right.$ et $H\left|\begin{matrix}r\\k/r\end{matrix}\right.$ et donc $G=H$. Par suite $R_1R_2R_3$ est équilatéral.

4. Partant d'un point $D\left|\begin{matrix}d\\k/d\end{matrix}\right.$ sur (γ), on considère on symétrique H par rapport à l'origine. L'intersection de (γ) et du cercle de centre H passant par D définit 3 points A,B,C. En effet l'équation définissant les abscisses des points intersection est comme on l'a vu par les calculs précédents une équation de degré 4 de la forme :
$(x-d)Q(x)=0$ avec Q de la forme étudiée en 3.b dont les racines déterminent les abscisses des points A,B,C. Le triangle ABC est alors équilatéral et par l'étude précédente on peut aussi affirmé que tout triangle équilatéral sur (γ) peut être ainsi construit.