Correction

Partie I

1. Soit $g:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\ln x+x$.
   g est continue et strictement croissante donc g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\left]\lim_0 g,\lim_{+\infty} g\right[=\mathbb{R}$.
   Par suite l'équation (E_p) possède une unique solution $x_p=g^{-1}(p)$.
   De plus : $g(1)=1\le p\le \ln p+p=g(p)$ donc $x_p\in[1,p]$.

2. g^{-1} est croissante et $p\le p+1$ donc $x_p=g^{-1}(p)\le g^{-1}(p+1)=x_{p+1}$.
   Ainsi (x_p) est croissante.

3.a Comme $1\le x_p\le p$ on a $0\le \dfrac{\ln x_p}{p}\le\dfrac{\ln p}{p}\to 0$ et donc $\dfrac{\ln x_p}{p}\to 0$.
   Ainsi $\ln x_p=o(p)$.
   La relation $x_p+\ln x_p=p$ donne alors $x_p=p+o(p)\sim p$.

3.b $x_{p+1}-x_p=(p+1-\ln x_{p+1})-(p-\ln x_p)=1-\ln\dfrac{x_{p+1}}{x_p}$.
   Or $x_p\sim p$ et $x_{p+1}\sim p+1\sim p$ donc $\dfrac{x_{p+1}}{x_p}\to 1$ puis $x_{p+1}-x_p\to 1$.

4.a $x_p\sim p\to+\infty\ne 1$ donc $\ln x_p\sim \ln p$.
   Puisque $\ln x_p=\ln p+o(\ln p)$ on a $x_p=p-\ln(x_p)=p-\ln p+o(\ln p)$.

4.b $y_p=-\ln x_p+\ln p=-\ln\dfrac{x_p}{p}=-\ln\dfrac{p-\ln x_p}{p}=-\ln\left(1-\dfrac{\ln x_p}{p}\right)$
   Or $\dfrac{\ln x_p}{p}\sim\dfrac{\ln p}{p}\to 0$ donc $y_p\sim\dfrac{\ln x_p}{p}\sim\dfrac{\ln p}{p}$.
   Ainsi $y_p=\dfrac{\ln p}{p}+o\left(\dfrac{\ln p}{p}\right)$ puis $x_p=p-\ln p+\dfrac{\ln p}{p}+o\left(\dfrac{\ln p}{p}\right)$.

Partie II

1. Soit $h:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $h(x)=x-\ln x$.
   h est dérivable et $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}\le 0$ sur $[1,+\infty[$.
   Ainsi h est décroissante et puisque $h(1)=1$ on a $\forall x\ge 1, h(x)\ge 1$.
   Finalement $\forall x\in[1,+\infty[,\ln x\le x-1$.

2.a Puisque $x\mapsto \ln x$ est croissante, $f:x\mapsto p-\ln x$ est décroissante.
   Les points fixes de f correspondent aux valeurs d'annulation de $\varphi:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=f(x)-x=p-(\ln x+x)$. Or φ est strictement décroissante et $\varphi(x_p)=0$ donc x_p est le seul point fixe de f.

2.b Puisque $f(1)=p$, $f(p)=p-\ln p\ge 1$ et f décroissante la restriction de f à $[1,p]$ est à valeurs dans $[1,p]$. Il s'en suit que la suite (u_n) est bien définie et est formée d'éléments de $[1,p]$.

2.c Comme $f:[1,p]\to[1,p]$ est décroissante, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (et de monotonies contraires).
   De plus ces suites sont bornées car formées d'éléments de $[1,p]$, donc ces deux suites sont convergentes.

2.d $\forall n\in\mathbb{N},\ 1\leq u_{2n},u_{2n+1}\leq p$ donne à la limite $1\leq \alpha,\beta\leq p$.

Comme f est continue et $u_{2n+1}=f(u_{2n})$ on obtient à la limite $\beta=f(\alpha)$.

De même, à partir de $u_{2n+2}=f(u_{2n})$, on obtient $\alpha=f(\beta)$.

2.e Considérons à nouveau $h:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $h(x)=x-\ln x$.

h est dérivable et $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$. Puisque $\forall x\in\,]1,p],h'(x)>0$, la fonction h est strictement croissante sur $[1,p]$.

Les égalités $\beta=f(\alpha)$ et $\alpha=f(\beta)$ donnent :

$\beta=p-\ln\alpha$ (1) et $\alpha=p-\ln\beta$ (2).

$(1)-(2)$ donne $\beta-\alpha=\ln\beta-\ln\alpha$ puis $\beta-\ln\beta=\alpha-\ln\alpha$.

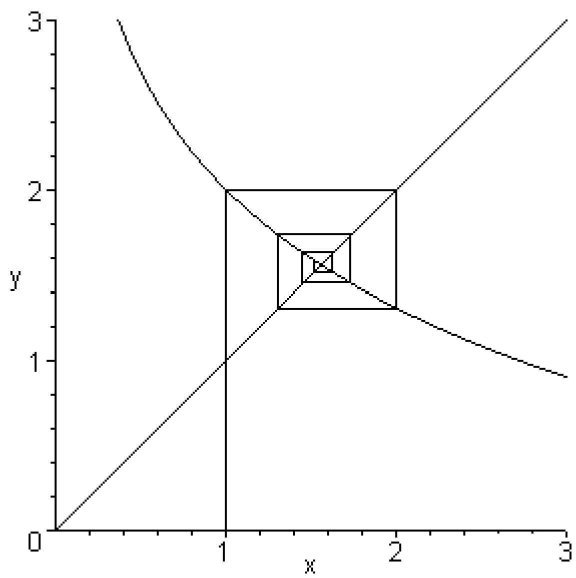
Ainsi $h(\beta)=h(\alpha)$. Or h étant strictement monotone, h est injective et donc $\alpha=\beta$.

2.f Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite α, (u_n) converge aussi vers α. Or $u_{n+1}=f(u_n)$ donne à la limite $f(\alpha)=\alpha$.

α est donc point fixe de f et par suite $\alpha=x_p$.

Finalement $u_n\to x_p$.

3.a



3.b On sait (u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones.

A la calculatrice : $u_2-u_0>0$ et $u_3-u_1<0$

Donc (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.

De plus ces deux suites convergent vers x_2 par suite $\forall n\in\mathbb{N},u_{2n}\leq x_2\leq u_{2n+1}$.

A la calculatrice :

$u_{12}=1{,}554$ à 10^{-3} près et $u_{13}=1{,}559$ à 10^{-3} près.

Par suite $x_2=1{,}55$ à 10^{-2} près par défaut.