

## Etude d'une suite définie implicitement

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

L'objectif du problème est d'étudier les solutions des équations  $(E_p) : \ln x + x = p$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}^{++}$ .

### Partie I - Etude de la suite des solutions

1. Montrer que l'équation  $(E_p)$  possède une unique solution et que celle-ci appartient au segment  $[1, p]$ .  
Dans la suite du problème, cette solution sera notée  $x_p$ .
2. Montrer que la suite  $(x_p)_{p \geq 1}$  est croissante.
- 3.a Montrer que  $\frac{\ln x_p}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$  et en déduire  $x_p \sim p$ .
- 3.b Déterminer la limite de  $x_{p+1} - x_p$ .
- 4.a Donner un équivalent simple à  $\ln x_p$ .  
En déduire  $x_p = p - \ln p + o(\ln p)$ .
- 4.b On pose  $y_p = x_p - p + \ln p$ .  
Donner un équivalent simple à  $y_p$ .  
En déduire  $x_p = p - \ln p + \frac{\ln p}{p} + o\left(\frac{\ln p}{p}\right)$ .

### Partie II - Approximation numérique de $x_p$

Dans cette partie, l'entier  $p$  est fixé.

1. Montrer que  $\forall x \geq 1, \ln x \leq x - 1$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = p - \ln x$ .
  - 2.a Montrer que  $f$  est décroissante et que  $x_p$  est le seul point fixe de  $f$  <sup>(1)</sup>
  - 2.b Soit  $a \in [1, p]$  et  $(u_n)$  la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = p - \ln u_n \end{cases}$$
Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, p]$ .
  - 2.c Justifier la monotonie des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  puis leur convergence.
  - 2.d On pose  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n}$  et  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}$ .  
Justifier que  $\alpha, \beta \in [1, p]$  puis que  $f(\alpha) = \beta$  et  $f(\beta) = \alpha$ .
  - 2.e En observant que la fonction  $x \mapsto x - \ln x$  est strictement croissante sur  $[1, p]$ , établir que  $\alpha = \beta$ .
  - 2.f En déduire que  $u_n \rightarrow x_p$ .
3. On reprend les notations précédentes en se plaçant dans le cas  $p = 2$  et en prenant  $a = 1$ .
  - 3.a Représenter sur un graphique d'unité 4 cm la construction des termes  $u_k$  pour  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ .
  - 3.b Déterminer la valeur décimale par défaut de  $x_2$  à la précision  $10^{-2}$ .  
On précisera la démarche qui a permis d'obtenir celle-ci

---

<sup>(1)</sup> On appelle point fixe d'une fonction  $f$  tout  $x$  tel que  $f(x) = x$ .