Master de physique fondamentale 2017-2018.

Corrigé de l'examen de mécanique des fluides, 2 novembre 2017.

I - Sustentation d'une feuille glissant sur une table.

1°) Analyse dimensionelle.

$$\frac{F}{\ell} = f(\eta, U, \theta, h_1, h_2).$$

$$\begin{cases} [F/\ell] = M T^{-2} \\ [\eta] = M L^{-1} T^{-1} \\ [\theta] = 1. \\ [h_1] = [h_2] = L. \\ [U] = L T^{-1} \end{cases}$$

on a $k = 6$ grandeurs physiques et $r = 3$ unités (M, L, T).

Il existe donc $k - r = 3$ nombres sans dimension.

$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3).$$

- θ étant déjà sous forme adimensionelle, on peut identifier $\theta = \pi_2$
- $\pi_3 = h_2 / h_1$ (trivial).
- reste $\pi_1 = \frac{F}{\ell} \eta^\alpha U^\beta$

soit $1 = M T^{-2} (M L^{-1} T^{-1})^\alpha (L T^{-1})^\beta = M^0 L^0 T^0$

on trouve $\alpha = -1$ et $\beta = -1$

d'où $\pi_1 = \dfrac{F/\ell}{\eta U}$, soit $\boxed{\dfrac{F}{\ell} = \eta U \phi\left(\theta, \dfrac{h_2}{h_1}\right)}$

2°) Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \bullet\ u_x = -U \text{ et } u_z = 0 \text{ en } z = 0. \\ \bullet\ u_x = u_z = 0 \text{ en } z = h(x). \end{cases}$$

Incompressibilité : $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, donc $\dfrac{O(u_x)}{L} \simeq \dfrac{O(u_z)}{\Delta h}$

on a $\underline{O(u_x) = U}$, d'où $O(u_z) \simeq U \dfrac{\Delta h}{L} \simeq \underline{\theta U \ll U.}$

(avec $\Delta h \simeq h_2 - h_1$)

3°) Nombre de Reynolds : $\underline{Re = \frac{\rho U h_1}{\eta}}$

(on peut également choisir ici h_2 ou $\Delta h = h_2 - h_1$).

$$Re = \frac{1{,}2 \times 1 \times 10^{-4}}{1{,}8 . 10^{-5}} \simeq 7 .$$

l'Approximation de lubrification s'applique si $\underline{Re \ll \frac{1}{\theta} = 10^3}$.

Elle est donc satisfaite ici.

4°). Puisque $Re \ll 1/\theta$, le problème est décrit par l'équation de Stokes _ les Conditions aux limites étant stationnaires, on a :

$$\underline{\vec{0} = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{u}}$$

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e}_x : & 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x \\ \text{selon } \vec{e}_z : & 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z . \end{cases}$$

avec $u_z \ll u_x$ (cf question 2) et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \frac{1}{L^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim \frac{1}{\Delta h^2}$, d'où le résultat.

5°) $\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$ avec $\begin{cases} u_x = -U & \text{en } z = 0 \\ u_x = 0 & \text{en } z = h(x). \end{cases}$

on a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0$, donc $\frac{\partial p}{\partial x}$ indépendant de z.

donc $u_x(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + Az + B$

on identifie $B = -U$ et $A = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h(x)$

soit $$\boxed{u_x(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z\,(z - h(x)) - U\left(1 - \frac{z}{h(x)}\right).}$$

6°) Débit volumique : $Q_v(x) = \iint \vec{u} \cdot d^2\vec{S}$

avec $d\vec{S} = dy\, dz\, \vec{e}_x$, soit $Q_v = \ell \int_0^{h(x)} u_x(z)\, dz$

$$\Rightarrow \underline{q(x) = \frac{Q_v}{\ell} = \int_0^{h(x)} u_x(z)\, dz}$$

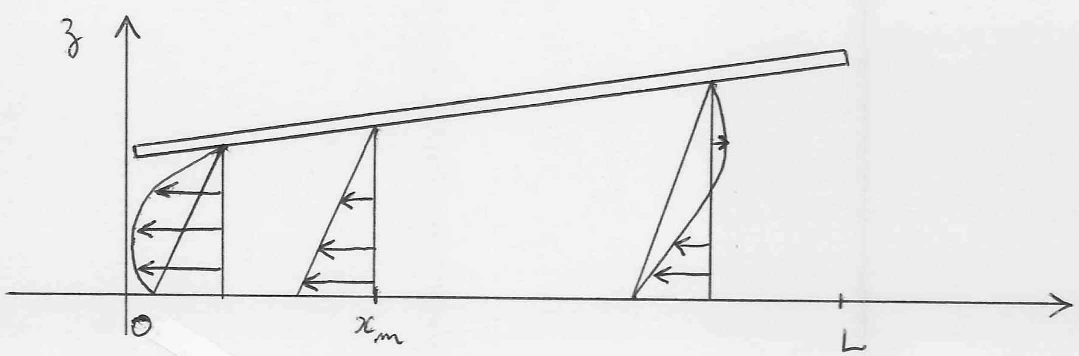
$$q(x) = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\underbrace{\int_0^{h(x)} z\,(z - h(x))\,dz}_{\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}hz^2\right]_0^h = -\frac{h^3}{6}} - U\underbrace{\int_0^{h(x)}\left(1 - \frac{z}{h(x)}\right)dz}_{\left[z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{h}\right]_0^h = h/2}$$

d'où : $$\boxed{q(x) = -\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Uh(x)}{2}}$$

La masse contenue dans un volume entre 2 surfaces situées en x et en x' doit être conservée pour tout x et x', donc $q(x) = q(x')$: q doit donc être indépendant de x.

7°) on a $p(0) = p(L) = p_0$.

donc (par le théorème des accroissements finis) il existe $x_m \in [0, L]$ tel que $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x_m} = \frac{p(L) - p(0)}{L} = 0$.



- en $x = x_m$, écoulement de Couette pur : $u_x = -U\left(1 - \frac{z}{h(x)}\right)$.
- en $x > x_m$, $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$: Contribution de Poiseuille > 0.
- en $x < x_m$, $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$: " " " < 0.

8°) $q(x_m) = -\frac{Uh_m}{2}$ car $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x_m} = 0$

$q(x) = q(x_m)$, d'où $\underline{\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta U\left(\frac{h_m}{h^3(x)} - \frac{1}{h^2(x)}\right)}$

9°) on a $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial h}\dfrac{dh}{dx} = \theta \dfrac{\partial p}{\partial h}$

d'où $\dfrac{\partial p}{\partial h} = \dfrac{6\eta U}{\theta}\left(\dfrac{h_m}{h^3(x)} - \dfrac{1}{h^2(x)}\right)$.

on intègre vis-à-vis de h, entre $h_1 = h(0)$ et $h(x)$:

$$p(h) = \int_{h_1}^{h(x)} \frac{\partial p}{\partial h}\, dh = \underline{p(h_1) + \frac{6\eta U}{\theta}\left[\frac{h_m}{2}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h^2}\right) - \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h}\right)\right]}$$

on a $p(x) = p_0$ en $x = L$, donc $p(h) = p_0$ en $h(x) = h_2$

d'où $\dfrac{h_m}{2}\left(\dfrac{1}{h_1^2} - \dfrac{1}{h_2^2}\right) = \dfrac{1}{h_1} - \dfrac{1}{h_2}$

soit $\dfrac{h_m}{2}\left(\dfrac{(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)}{h_1^2 h_2^2}\right) = \dfrac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} \Rightarrow \underline{h_m = 2\dfrac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}$

10°) Force exercée par l'extérieur sur le système {couche d'air entre la feuille et le plan horizontal} :

$\vec{F} = -\oiint p\, d^2\vec{S}$, où $d^2\vec{S}$ est la normale sortante (fluide → exterieur).

Ici, on souhaite calculer la force exercée par le fluide sur la feuille ⇒ changement de signe.

$\vec{F}_{Fl\to Feuille} = \iint p\, d^2\vec{S}$.

L'air au-dessus de la feuille exerce également une pression p_0

d'où $\vec{F}_{Fl\to Feuille} = \iint (p - p_0)\, d^2\vec{S}$.

Cette force est dirigée selon $\vec{n}$ normal à la feuille.

Mais avec $\theta \ll 1$, on a $\vec{n} \simeq \vec{e}_z$ et $d^2\vec{S} \simeq dx\,dy\,\vec{e}_z$

d'où, selon $\vec{e}_z$: $F = l\displaystyle\int_0^L (p(x) - p_0)\,dx$

on utilise de nouveau le changement de variable $dh = \theta\, dx$, d'où le résultat.

soit : $$\frac{F}{l} = \frac{6\eta U}{\theta^2}\int_{h_1}^{h_2}\left[\frac{h_m}{2}\left(\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h^2}\right)-\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h}\right)\right]dh$$

$$= \dots = \frac{6\eta U}{\theta^2}\left[-2\,\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}+\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\right] = \eta U\,\phi(\theta, h_2/h_1)$$

avec $$\phi(\theta, X) = \frac{1}{\theta^2}\left(-2\,\frac{X-1}{X+1}+\ln X\right)$$

11°) Poids de la feuille : $P = mg = 0{,}1\ N$ (vers le bas)

Force hydrodynamique : $F = 4\ N$ (vers le haut).

$F > P$, donc la feuille va monter.

12°) Force de frottement : $F_x = \iint \sigma'_{xz}\, d^2S_z$

avec $\sigma'_{xz} = \eta \left.\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)_{z=0}$ et $d^2S_z = dx\,dy$.

soit $\sigma'_{xz} = -\frac{h(x)}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta U}{h(x)}$ avec $\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta U\left(\frac{h_m}{h^3(x)} - \frac{1}{h^2(x)}\right)$

d'où $$\frac{F_x}{l} = \eta U\int_0^L\left(-3\left[\frac{h_m}{h^2}-\frac{1}{h}\right]+\frac{1}{h}\right)dx$$

$$= \frac{\eta U}{\theta}\int_{h_1}^{h_2}\left(-3\,\frac{h_m}{h^2}+\frac{4}{h}\right)dh$$

$$= \frac{\eta U}{\theta}\left[-6\,\frac{h_2-h_1}{h_2+h_1}+4\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\right]$$

Remarque : la force verticale est en $1/\theta^2$, tandis que la force horizontale est en $1/\theta$.