

Mécanique des fluides

EXAMEN DU JEUDI 2 NOVEMBRE 2017
(Durée : 3 heures - sans document)

**Important : rendre les deux problèmes sur des copies séparées.
Reporter votre numéro d'anonymat sur chacune des deux copies.**

Problème 1. Sustentation d'une feuille glissant sur une table

Si l'on fait glisser une feuille de papier à la surface d'une table lisse, on constate que celle-ci subit très peu de frottement : l'écoulement dans la fine couche d'air entre la table et la feuille légèrement inclinée induit une force verticale qui compense le poids de la feuille, évitant ainsi un contact solide. L'objectif de ce problème est de calculer cette force verticale.

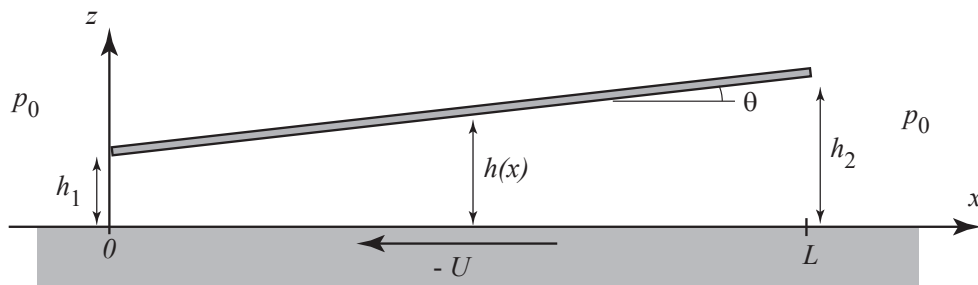


FIGURE 1 – Ecoulement dans une couche d'air comprise entre une feuille inclinée et une surface horizontale, dans le référentiel de la feuille.

On considère une feuille plane et rigide, de longueur $L = 30$ cm et de largeur $\ell = 20$ cm dans la direction y (perpendiculaire au plan du dessin), faisant un petit angle θ par rapport à l'horizontale. Cette feuille est en translation à vitesse constante $U = 1$ m/s, de gauche à droite, au dessus d'une surface horizontale fixe. La distance entre la feuille et la surface est décrite par

$$h(x) = h_1 + \theta x,$$

avec $h_1 = 0.1$ mm et $\theta \simeq \tan \theta = (h_2 - h_1)/L = 10^{-3}$.

Dans tout ce problème on va se placer dans le référentiel de la feuille (figure 1). Dans ce référentiel, la feuille est à vitesse nulle, tandis que la surface horizontale est en déplacement à vitesse $-U$, de droite à gauche. On ne prend en compte que l'écoulement d'air (densité $\rho = 1.2$ Kg m $^{-3}$, viscosité dynamique $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Kg m $^{-1}$ s $^{-1}$) entre la surface inférieure et la feuille ; en négligeant l'écoulement d'air à l'extérieur, on peut considérer que la pression en $x = 0$ et en $x = L$ est égale à la pression atmosphérique p_0 . On ne considère pas l'effet de la gravité dans l'écoulement.

1. On cherche à déterminer la force verticale par unité de profondeur, F/ℓ , exercée par le fluide sur la feuille. En supposant que F/ℓ ne dépende que de η , U , θ , h_1 et h_2 , en déduire par analyse dimensionnelle qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{F}{\ell} = \eta U \Phi(\theta, h_2/h_1). \quad (1)$$

2. Préciser les conditions aux limites pour la vitesse, et donner l'ordre de grandeur des composantes u_x et u_z de la vitesse.
3. Calculer le nombre de Reynolds dans ce problème, et vérifier qu'il satisfait les conditions d'application de l'approximation de lubrification.
4. Montrer que l'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

5. Calculer la vitesse u_x en tout point de l'écoulement en fonction de $\partial p/\partial x$.
6. Calculer le débit volumique q par unité de profondeur (selon y) à travers une surface verticale (dans le plan y, z) située à une abscisse x quelconque. Pourquoi ce débit est-il indépendant de x ?
7. Justifier qu'il existe une abscisse x_m telle que $\partial p/\partial x = 0$. Dessiner l'allure du profil de vitesse $u_x(z)$ en $x < x_m$, en $x = x_m$ et en $x > x_m$.
8. En calculant le débit en x_m , en déduire que le gradient de pression s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta U \left(\frac{h_m}{h^3(x)} - \frac{1}{h^2(x)} \right),$$

où $h_m = h(x_m)$.

9. Afin de pouvoir intégrer cette équation différentielle, on la ré-écrit sous la forme $\partial p/\partial h = F(h)$. En déduire le profil de pression

$$p(x) = p_0 + \frac{6\eta U}{\theta} \left[\frac{h_m}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h^2(x)} \right) - \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h(x)} \right) \right].$$

En déduire l'expression de h_m en fonction de h_1 et h_2 .

10. On souhaite calculer la composante verticale de la force exercée par le fluide sur la feuille. Montrer que cette force peut s'écrire

$$\frac{F}{\ell} = \frac{1}{\theta} \int_{h_1}^{h_2} (p(h) - p_0) dh.$$

Calculer F/ℓ et l'exprimer sous la forme (1).

11. Sachant qu'une feuille de papier rigide A4 pèse environ 10 g, indiquez qualitativement quel sera son mouvement vertical dans ces conditions.
12. Question bonus : Calculer la composante horizontale de la force de frottement exercée par le fluide sur la surface inférieure.

(D'après "Hydrodynamique Physique", Guyon, Hulin, Petit, CNRS Editions)