II - Analyse d'une carte météorologique

1°) Equation de Navier-Stokes avec force de Coriolis :

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{U/T} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}_{\substack{U^2/L \\ \text{inertiel}}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \underbrace{- 2\vec{\Omega}\wedge\vec{u}}_{\substack{2\Omega U \\ \text{Coriolis}}} \underbrace{+ \nu\nabla^2\vec{u}}_{\substack{\nu U/L^2 \\ \text{visqueux.}}}$$

inertiel $\ll$ Coriolis : $\frac{U^2}{L} \ll 2\Omega U$, soit $Ro = \frac{U}{2\Omega L} \ll 1$

visqueux $\ll$ inertiel : $\nu \frac{U}{L^2} \ll \frac{U^2}{L}$, soit $Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1$.

* Donc si $Ro \ll 1$ et $Re \gg 1$, alors l'équation de NS se ramène à l'équation $\vec{\nabla}p = -2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{u}$.

(NB : Lorsque $Re \gg 1$, on a par ailleurs $T \simeq L/U$, donc le terme instationnaire est d'ordre U^2/L, lui aussi négligeable comparé au terme de Coriolis).

* $\vec{\Omega}\wedge\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$. Donc $\vec{\nabla}p \perp \vec{u}$, donc $\vec{u}$ parallèle aux isobares.

(Formellement : $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p = \vec{u}\cdot(-2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{u}) = 0$

or on a $dp = d\vec{s}\cdot\vec{\nabla}p$ avec $d\vec{s} = \vec{u}\,dt$

d'où $dp = 0$, soit $p = $ cste le long de $\vec{u}$).

2°) $\Omega = \dfrac{2\pi}{1\,\text{jour}} \simeq \underline{7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{rad/s}}.$

$$\begin{cases} \text{Dépression :} & Ro = 0{,}17 \\ \text{Tornade :} & Ro = 7000 \\ \text{Baignoire :} & \text{en choisissant } L \simeq 1\ \text{cm et } U \simeq 1\ \text{m/s}, \\ & Ro \simeq 7 \times 10^5. \end{cases}$$

Donc seul le premier cas (la dépression) est influencé par la rotation de la Terre.

3°) Eq. (3) selon
$$\begin{cases} \vec{e}_x : & \dfrac{\partial p}{\partial x} = 2\rho\Omega\, u_y. \\ \vec{e}_y : & \dfrac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\Omega\, u_x \\ \vec{e}_z : & \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

$\vec{\nabla}\wedge(\text{eq.}3)$: $\vec{0} = -2\rho\,\vec{\nabla}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{u})$ (car $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}p = \vec{0}$)

soit : $$\vec{0} = -2\rho \left| \begin{array}{l} 2\Omega\, \partial u_x/\partial z. \\ 2\Omega\, \partial u_y/\partial z. \\ -2\Omega\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right) \end{array} \right.$$

on en déduit que :

(i) $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = 0$: incompressibilité dans le plan (x,y)

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial z}u_x = \dfrac{\partial}{\partial z}u_y = 0$, donc (u_x, u_y) indépendant de z.

4°) $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = -\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right) = 0.$

or $u_z = 0$ en $z = 0$, donc $u_z = 0\ \forall z$.

5°) Sur la carte, on compte environ 10 isobares sur une distance de 1100 km, soit $\frac{\Delta p}{L} \simeq 400\ \text{Pa} \times \frac{10}{1000\ \text{km}}$

$\simeq 0{,}004\ \text{Pa/m}$.

d'où $U \approx \frac{\Delta p / L}{2 \Omega \rho} \approx \underline{45\ \text{m/s} \simeq 170\ \text{km/h}.}$

$Ro \simeq \frac{U}{2 \Omega D} \simeq 0{,}1$ (avec $D \simeq 3000$ km le diamètre de la dépression).

Ro petit $\Rightarrow$ Ecoulement influencé par la rotation de la Terre.

6°) On calcule la divergence de l'éq. (3)

$$\nabla^2 p = -2 \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{u})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = +2 \rho \Omega \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 2 \rho \Omega \omega_z$$

7°) si $\omega_z = \text{cste}$, alors, en symétrie cylindrique,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 2 \rho \Omega \omega_z$$

$\Rightarrow \underline{p(r) = P_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega \omega_z r^2}$, où P_0 est la pression au centre du tourbillon (en $r = 0$).

8°) si $\omega_z > 0$ (cyclone), alors $p(r) \geq P_0$: la pression est donc minimale au centre $\Rightarrow$ "dépression".

inversement, si $\omega_z < 0$ (anticyclone), alors $p(r) \leq P_0$.

Sur la Fig. 2, la dépression ("L") au large de l'Ecosse tourne dans le sens trigonométrique ↺

il s'agit donc bien d'un cyclone.

9°) $\begin{cases} \text{pour } z \gg \delta, & \vec{\nabla} p = -2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} \quad (A) \\ \text{pour } z \ll \delta, & \vec{\nabla} p = \eta \nabla^2 \vec{u}. \quad (B). \end{cases}$

a) selon (A), on a $\partial p/\partial z = 0$ (cf. question 3)

selon (B), on a $\partial p/\partial z = \eta \nabla^2 u_z$. Donc si $u_z = 0$, alors

$\partial p/\partial z = 0$. pour $\delta \ll z$.

Conclusion : on a bien $\underline{\partial p/\partial z = 0 \quad \forall z.}$

b) Dans le cas d'un anticyclone, on a $\omega_z < 0$, soit $p(r) \geq P_0$

Donc $\partial p/\partial r < 0$ pour $z \gg \delta$.

Puisque $\partial p/\partial z = 0$, alors on a aussi $\partial p/\partial r < 0$ pour $z \ll \delta$.

Or, pour $z \ll \delta$, l'écoulement est régi par l'équation de Stokes.

Donc, par analogie avec un écoulement de Poiseuille,

lorsque $\partial p/\partial r < 0$ on a $u_r > 0$.

c) L'existence d'un écoulement $u_r > 0$ implique $u_z \neq 0$.

(Incompressibilité : $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$)

ici, on doit avoir $u_z < 0$ pour compenser $u_r > 0$.

Etant donné que $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ pour $z \gg \delta$ (question 4)

Alors $u_z < 0 \quad \forall z$.

Foireux pour le prof, c'est pas du Stokes près de la surface, on peut pas éliminer le terme Coriolis. C'est en fait un problème de couche limite -> Eckman. On montre que le grad p s'élimine, et il reste que visq+Coriolis. En utilisant l'incomp. horiz, on obtient le flux radial. Le flux radial est /géométrique/, dû à la condition u=0 à la surf, pas dû à un gradient de pression ! (Pas le même mécanisme que la tasse d'Einstein, où c'est le terme non-lin inertiel qui fait ça, pas Coriolis.) Enfin, on obtient le petit flux vertical par incomp 3D.

10°) Cyclone $\Rightarrow u_z > 0$: l'Air monte, se refroidit, et la vapeur d'eau condense $\Rightarrow$ pluie.

Inversement, Anticyclone $\Rightarrow u_z < 0$: L'air descend, se réchauffe, et peut donc contenir une plus grande quantité d'eau sous forme de vapeur $\Rightarrow$ temps sec (air humide mais sans pluie).