Problème 2. Analyse d'une carte météorologique

Les grandes circulations atmosphériques sont dominées par l'effet de la rotation de la Terre ainsi que par la stratification en densité de l'air. Dans ce problème, on considère toutefois l'atmosphère comme isodensité pour simplifier, et l'on s'intéresse seulement à l'influence de la rotation de la Terre sur la structure des écoulements.

On admet que, dans un référentiel tournant de vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$, l'équation de Navier-Stokes pour un fluide isodensité s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega}_\wedge \vec{u} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \quad (2)$$

où $\vec{u}$ est la vitesse *relative* du fluide dans le référentiel tournant. Le terme supplémentaire $-2\vec{\Omega}_\wedge \vec{u}$ est la force de Coriolis (par unité de masse). La force centrifuge et la force de gravité n'apparaissent pas, car elles sont incluses dans le terme de pression modifiée p : elles n'interviennent donc pas dans la suite.

On considère un repère local Cartésien, tel que (x, y) est tangent à la surface de la Terre et z selon la verticale locale. Pour simplifier, nous allons nous restreindre à l'étude d'écoulements atmosphériques au voisinage du pôle Nord : on peut alors prendre $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, avec $\Omega > 0$ et $\vec{e}_z$ l'axe de rotation de la Terre. On note L la taille caractéristique des structures de l'écoulement, U leur vitesse caractéristique, et $T = L/U$ le temps caractéristique d'évolution du champ de vitesse.

1. Déterminer les ordres de grandeur des termes inertiels, visqueux et de Coriolis de l'équation (2). Dans le cadre de l'*approximation géostrophique*, cette équation devient

   $$\vec{\nabla} p = -2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}. \quad (3)$$

   Exprimer, en fonction des nombres de Reynolds $Re = UL/\nu$ et de Rossby $Ro = U/2\Omega L$, les conditions sous lesquelles cette approximation est vérifiée. En déduire que le vecteur vitesse est alors dirigé le long des isobares.

2. Calculer la vitesse angulaire Ω de la Terre, et en déduire le nombre de Rossby dans le cas d'une dépression (10 m/s sur 400 km), d'une tornade (20 m/s sur 20 m) et de la vidange d'une baignoire. Qu'en déduisez-vous de l'influence de la rotation de la Terre sur ces 3 écoulements ?

3. Ecrire les projections de l'équation (3) selon les axes x, y, z. A partir du rotationnel de l'équation (3), en déduire que :

   (i) l'écoulement horizontal (u_x, u_y) satisfait une condition d'incompressibilité bi-dimensionnelle.

   (ii) le champ de vitesse $\vec{u}$ est invariant par translation selon z (ce résultat porte le nom de *théorème de Taylor-Proudman*).

4. En tenant compte des conditions aux limites en $z = 0$, en déduire que le champ de vitesse est horizontal en tout point.

5. A partir d'une évaluation du gradient de pression, estimez la vitesse du vent au voisinage de la grande zone dépressionnaire située sur l'Ecosse sur la carte de la figure 2 (au centre de la carte). On prendra $\rho = 0.6$ kg m^{-3} pour la densité moyenne de l'air en altitude. Que pensez-vous du nombre de Rossby dans cette région ?

6. Montrer que le Laplacien de la pression s'écrit

   $$\nabla^2 p = 2\rho\Omega\omega_z, \quad (4)$$

   où ω_z est la composante selon z de la vorticité.

7. On considère un grand tourbillon de symétrie circulaire : il s'agit par convention d'un *cyclone* s'il tourne dans le même sens que la Terre, et d'un *anticyclone* dans le cas contraire. En considérant que l'on a $\omega_z = cste$ près du centre du tourbillon (approximation de rotation solide), en déduire le

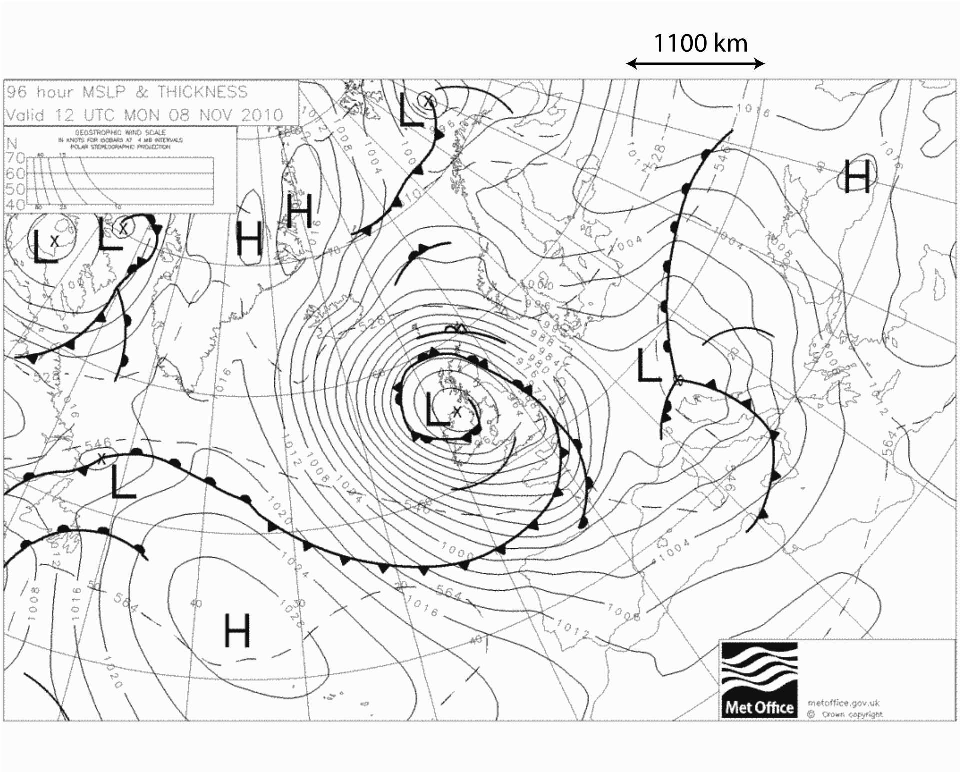

FIGURE 2 – Carte de pression sur l'Atlantique Nord. Les isobares sont espacées de 400 Pa (les pressions indiquées sur les isobares sont exprimées en hPa). Les centres de haute et basse pression sont notés H (*high*) et L (*low*). Les lignes marquées de triangles ou de demi-cercles représentent respectivement les fronts froids et chauds.

champ de pression $p(r)$ dans ce grand tourbillon, par intégration de l'équation (4) en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Le Laplacien dans ces coordonnées est donné par

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}f\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f.$$

8. En déduire que, dans l'hémisphère Nord, un cyclone est associé à une dépression, tandis qu'un anticyclone est associé à une surpression. Peut-on vérifier cette propriété sur la figure 2 ?
9. Les frottements avec la surface de la Terre font que l'équilibre géostrophique (3) n'est plus vérifié à basse altitude. Il existe une couche limite, d'épaisseur notée δ, telle que pour $z \gg \delta$ l'équation (3) reste valide, tandis que pour $z \ll \delta$ c'est le terme visqueux qui équilibre le gradient de pression.

   a) Si l'on considère l'écoulement comme strictement horizontal à toute altitude, montrer que la pression reste partout indépendante de z.

   b) On admettra qu'à basse altitude le vecteur vitesse est maintenant aligné avec le gradient de pression. Dans le cas d'un anticyclone (respectivement une dépression), déduire de la question 6 qu'il doit exister une vitesse radiale sortante (respectivement rentrante) près de la surface de la Terre.

   c) Montrer qu'il existe également alors une petite vitesse verticale dans le tourbillon, dont on déterminera l'ordre de grandeur. Commenter le signe de cette vitesse verticale.
10. Question Bonus : Il est bien connu que la présence d'un anticyclone favorise un temps sec, tandis qu'une dépression est souvent associée à un temps pluvieux. Pouvez-vous interpréter ces phénomènes ?